At 13, 24, 25, 35 : Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3

Marc Moyon[1], Renaud Chorlay[2] et Frédérique Plantevin[2]

[1]IREM de Limoges; marc.moyon@unilim.fr

[2]IREM de Paris, IREM de Brest; renaud.chorlay@espe-paris.fr, frederique.plantevin@univ-brest.fr

Résumé : Dans cette contribution, nous décrivons un projet de recherche intitulé « Passerelles » et mené dans le cadre de la commission inter-IREM « épistémologie et histoire des mathématiques ». Ce projet impliquant neuf IREM du réseau national (Brest, Dijon, Grenoble, La Réunion, Limoges, Lyon, Paris, Paris Nord, Poitiers), propose des expérimentations d'introduction d'une perspective historique ou philosophique dans l'enseignement des mathématiques. Quatre des neuf IREM – Limoges, Paris, Brest et Dijon – ont répondu à l'appel à contributions au colloque « Mathématiques au cycle 3 » et animé quatre ateliers distincts. Pour les présents actes, le choix a été fait de regrouper trois de ces travaux de manière à pouvoir à la fois exposer le cadre général de la recherche, et ensuite l'illustrer par des exemples présentés à Poitiers. La forme de présentation retenue devrait permettre de comprendre et de s'approprier les réflexions et les enjeux inhérents à ces expérimentations.

Mots clefs : Histoire des mathématiques ; géométrie plane ; numération ; calcul ; interdisciplinarité.

Introduction : objectifs, modalités du projet de recherche "Passerelles"

Neuf groupes IREM, répartis sur l'ensemble du territoire français (Brest, Dijon, Grenoble, La Réunion, Limoges, Lyon, Paris, Paris Nord, Poitiers) et réunis au sein de la commission inter-IREM « épistémologie et histoire des mathématiques »[1], travaillent sur l'introduction, au cycle 3, d'une perspective historique ou philosophique dans l'enseignement des mathématiques. Chaque groupe développe, dans son propre IREM, une ou des séquences d'enseignement qui sont expérimentées dans des classes de CM1, CM2 et/ou 6^{e} autour d'un document historique (texte officiel, décret de loi, source mathématique ou philosophique) ou d'un artefact matériel (machine, abaque ou instrument de mesure). Le projet « Passerelles : les mathématiques par leur histoire au cycle 3 » est original[2] au sens où il s'adresse à la fois aux professeurs des écoles dont la polyvalence est envisagée comme une richesse, et aux professeurs de collèges et lycées, à la fois spécialistes de leur discipline et enclins aux projets interdisciplinaires. En mathématiques, les trois grands domaines du programme de cycle 3 sont abordés : « nombres et calculs », « grandeurs et mesure » et « espace et géométrie ». Les périodes historiques traitées s'étendent de l'Antiquité à l'époque contemporaine. De nombreuses compétences sont explicitement travaillées. Outre les six compétences majeures des

[1] http://www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique15

[2] À notre connaissance, uniquement deux ouvrages francophones ont proposé, par le passé, des séances d'enseignement des mathématiques en intégrant une perspective historique pour l'école élémentaire : (Cerquetti-Aberkane et Rodriguez 1997) et (Cerquetti-Aberkane et *al*. 2002). Signalons encore les ouvrages plus récents (Jasmin, Brenni 2004) et (Djebbar et *al*. 2009), issus des travaux de « La main à la pâte », mais qui s'intéressent davantage à l'histoire des sciences expérimentales que mathématiques, exception faite de (Moyon 2009) pour l'étude des frises et pavages en CM2/6^{e}.

mathématiques (chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner, communiquer), on peut encore citer : se repérer dans le temps ; comprendre un document, notamment historique.

Comme les instructions officielles le précisent,

> *La mise en perspective historique de certaines connaissances (numération de position, apparition des nombres décimaux, du système métrique, etc.) contribue à enrichir la culture scientifique des élèves.* (*Bulletin Officiel Spécial* 11 du 26/11/15, Cycle 3, Mathématiques, p. 198)

Cependant, pour nous, l'apport ne peut être envisagé que dans ses dimensions culturelles. En effet, à l'instar des ouvrages collectifs (Barbin 2010, Barbin 2012) auxquels un grand nombre d'entre nous a participé, nous poursuivons l'étude des *modalités* de l'introduction d'une perspective historique – *via* des sources historiques primaires et/ou une mise en contexte – au regard des *effets* potentiels en termes de motivation des élèves, de dévolution des problèmes et d'appropriation des connaissances. En outre, dans le projet « Passerelles », nous allons encore plus loin dans les analyses didactiques des expérimentations (*a priori* et *a posteriori*). Nous souhaitons ainsi que tous les enseignants du cycle 3 et en particulier ceux du primaire, pour qui les mathématiques ne représentent qu'une des matières à enseigner, puissent s'approprier nos expérimentations pour les mettre en place à leur tour. Nous avons aussi voulu donner suffisamment de matériel pour que nos travaux puissent être utiles en formation initiale d'enseignants dans les ESPE et en formation continue (stages ou animations pédagogiques de circonscription).

À la suite de l'ensemble des expérimentations et des analyses, notre groupe est donc en train de finaliser un recueil collectif dans lequel tous les chapitres sont construits selon le même modèle. Nous présentons, de manière synthétique, les points du programme et les compétences spécialement travaillées. Ainsi, le lecteur peut choisir de lire plus spécifiquement un chapitre plutôt qu'un autre en fonction de ses objectifs d'enseignement ou de formation. Dans une première partie, chaque chapitre décrit les éléments historiques et culturels nécessaires à la prise en charge de la (ou des) séquence(s) proposée(s). De cette manière, le lecteur a en tête l'essentiel du contexte historique des documents ou artefacts travaillés. C'est aussi cette partie qui lui permet d'introduire la (les) séquence(s) en classe ou en formation. Dans une deuxième partie, nous détaillons la (les) séquence(s) proprement dite(s). En guise d'analyse *a priori*, les enjeux pédagogiques et didactiques sont explicités pour comprendre l'intérêt de celle(s)-ci. Nous décrivons ensuite les modalités précises de la (des) séquence(s) telle(s) que nous l'(les) avons mise(s) en œuvre. Parce que nous désirons montrer nos expérimentations au plus près du terrain, tous les chapitres sont largement illustrés de travaux d'élèves (voire de vidéos accessibles *via* internet) afin de guider notre analyse *a posteriori*. Enfin, dans une troisième et dernière partie, des prolongements possibles sont proposés en prenant en compte diverses orientations : la liaison école-collège, l'interdisciplinarité, l'utilisation du numérique...

Nous avons choisi de donner à voir trois des dites expérimentations qui ont été présentées au colloque de Poitiers. Cela nous permet de montrer l'esprit dans lequel le projet « Passerelles » s'est développé dans trois domaines d'enseignement : la géométrie avec la reproduction de figures de Léonard de Vinci, les grandeurs avec la duplication du carré chez Platon et enfin la numération et le calcul avec leur mécanisation à l'aide de l'étude d'instruments conçus au XVII^e^ siècle.

Faire de la géométrie avec Léonard de Vinci

Cette partie rend compte du travail du groupe “Liaison CM2-6e par l’histoire des mathématiques” de l’IREM de Limoges[3] composé de Chantal Fourest, Jérôme Dufour, Véronique Lefranc, Marc Moyon, Valérie Rosier-David et David Somdecoste.

Objectifs d’enseignement

Notre travail intègre l’enseignement de la géométrie plane, envisagé à partir de problèmes de reproduction de figures.

> *La reproduction de figures diverses, simples et composées est une source importante de problèmes de géométrie dont on peut faire varier la difficulté en fonction des figures à reproduire et des instruments disponibles. Les concepts généraux de géométrie (droites, points, segments, angles droits) sont présentés à partir de tels problèmes.* (*Bulletin Officiel Spécial* 11 du 26/11/15, Cycle 2, Mathématiques, p. 83)

En outre, notre approche s’appuie sur les recherches didactiques de Marie-Jeanne Perrin et de son équipe[4]. En particulier, dans leur travail sur la continuité de l’enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans, il est écrit que :

> *Faire de la géométrie demande de porter un regard spécifique sur les figures (...) :*
> *- il faut être capable de passer d’une vision de figures juxtaposées à des figures superposées (et réciproquement), en ajoutant, effaçant des lignes,...*
> *- Il faut être capable de voir des objets de plusieurs dimensions dans les figures : des surfaces, des lignes, des points et des relations entre eux (...).* (Perrin et *al.* 2013, 17)

Comprendre qu’un point est l’intersection de deux lignes (non nécessairement droites) est un enjeu du cycle 3. Il faut donc mettre en place des situations-problèmes riches qui amènent progressivement les élèves à chercher des lignes qui, à leur tour, permettent de construire des points. Par exemple, les élèves doivent voir un sommet d’un quadrilatère comme l’intersection de deux côtés et pas seulement comme un coin de la figure (le polygone étant alors envisagé uniquement comme une surface). En effet, si un élève reste dans une géométrie des formes, il sera incapable de créer de nouvelles lignes pour obtenir des points (extrémités ou intersections de lignes) ou pour établir, par exemple, des relations d’alignement.

La figure à reproduire est alors envisagée comme un support de recherche des relations géométriques qu’on peut construire. Elle permet d’expérimenter ce qu’on peut tracer et ce qui manque. L’observation de cette figure est une phase indispensable d’analyse, c’est-à-dire de recherche de conditions nécessaires, du problème.

Les élèves sont donc amenés à créer des points par intersection de deux lignes, points qui à leur tour définissent des lignes. Deux points caractérisent un segment mais aussi un cercle (le centre et un point du cercle). Deux points peuvent aussi déterminer une demi-droite ou une droite.

Pour travailler la reproduction de figures, nous avons choisi de décrypter certaines figures du *codex atlanticus* – compilation de plusieurs carnets de croquis – de Léonard de Vinci, célèbre artiste de la

---

[3] Nous tenons à remercier particulièrement Sylvie Marceau, IEN de Brive Centre, d’avoir rendu possible notre travail au sein de sa circonscription, notamment en facilitant le remplacement des professeurs des écoles.

[4] Citons, entre autres, (Duval et al. 2005), (Keskessa et *al*. 2007), (Offre et *al*. 2006) et (Perrin et *al*. 2013). Il sera encore utile de lire la contribution de Marie-Jeanne Perrin « Géométrie au cycle 3 : de la reproduction de figures avec des gabarits aux constructions à la règle et au compas » dans les présents actes du colloque de Poitiers.

Renaissance que les élèves de cycle 3 connaissent relativement bien. Avant de détailler pédagogiquement notre travail, donnons quelques éléments historiques sur Léonard et son *codex*.

Léonard de Vinci et le *codex atlanticus*

Léonardo naît à Vinci, petite ville de Toscane en Italie. C'est un autodidacte qui se forme à partir des livres de sa bibliothèque personnelle, ou au contact d'érudits contemporains. Apprenti d'Andrea de Verrochio, à Florence, il est officiellement membre de la guilde des peintres de Florence vers 20 ans. C'est aussi à Florence qu'il invente ses premières machines. Une dizaine d'années plus tard, en 1482, il se présente comme artiste et ingénieur à Milan où le Duc de la ville, Ludovico Sforza, va le protéger au sein de sa cour. À Milan, en plus de ses travaux en peinture, il étudie la musique ou encore la transformation du mouvement afin de mettre au point des machines et autres automates pour animer les fêtes du prince. En 1490, il est entièrement reconnu à Milan comme artiste éclectique. C'est aussi à ce moment-là qu'il commence à s'intéresser aux mathématiques. En effet, c'est à Milan, en 1496, qu'il rencontre Fra Luca Pacioli (vers 1445-1514), important mathématicien à qui l'on doit au moins deux ouvrages abordant les principaux domaines des mathématiques de son époque. En 1499, la ville de Milan est occupée par les français et Léonard quitte la ville avec son ami. Il parcourt la Toscane et la Romagne en tant qu'ingénieur militaire pour Cesare Borgia, son nouveau mécène. Quelques années après, vers 1506, il arrive à la cour française de Milan, gouvernée par Charles d'Amboise qui admire son travail. Toute liberté lui est offerte pour ses propres travaux : c'est à cette époque qu'il précise, entre autres, son projet « Mona Lisa » qu'il n'achèvera que bien des années plus tard. Lorsqu'en 1511, les Français sont chassés de Milan, Léonard quitte à nouveau la ville pour se réfugier dans d'autres villes. Entre autres, à partir de 1513, il est accueilli à Rome par le pape Léon X qui lui offre sa protection. En 1515, les troupes françaises, menées par François Ier, capturent à nouveau Milan. Et dès 1516, Léonard vient s'installer à Amboise (en France) sur invitation du jeune roi. Même affaibli par une paralysie du bras droit, il continue son travail de création. Il meurt à Cloux en 1519.

Léonard est un homme de tous les arts et de toutes les sciences. Il peint, il sculpte, il invente des machines. Toutes ses œuvres, réalisées ou pas, reposent sur une observation attentive, minutieuse de l'homme, de la faune, de la flore et des propriétés de la nature en général. L'artiste laisse de nombreuses notes et dessins qui sont rassemblés dans plusieurs ensembles qu'on appelle *codex* (ou *codices* au pluriel).

Le *codex atlanticus* est un de ces ensembles. Il s'agit d'une compilation réalisée à titre posthume : plus de mille feuillets en 12 volumes. Il est aujourd'hui conservé à la grande bibliothèque Ambrosienne de Milan. On lui attribua le nom de *codex atlanticus* à cause de son grand format (64,5 × 43,5 cm) rappelant celui des atlas. Il couvre une très longue période de la vie de Léonard (de 1478 et 1519). Il illustre ainsi tout son génie : machines volantes, engins de guerre, instruments de musique, astronomie, géographie, botanique, architecture, anatomie, notes autobiographiques et considérations philosophiques. C'est à l'intérieur de ce *codex* que notre groupe a trouvé l'inspiration pour mettre en place des activités autour de la reproduction de figures planes. Nous avons exploité plusieurs figures correspondant à plusieurs feuillets[5]. Nous montrons ici le seul feuillet 1040 (recto), intitulé « quadrature du cercle ». En effet, Léonard était préoccupé par cette

[5] Nous développons ailleurs l'utilisation d'autres figures pour le cycle 3. Voir notamment, Marc Moyon, « La géométrie des carnets de Léonard de Vinci », (à paraître).

question antique de la construction, à la règle et au compas, d'un carré d'aire égale à celle d'un disque donné.

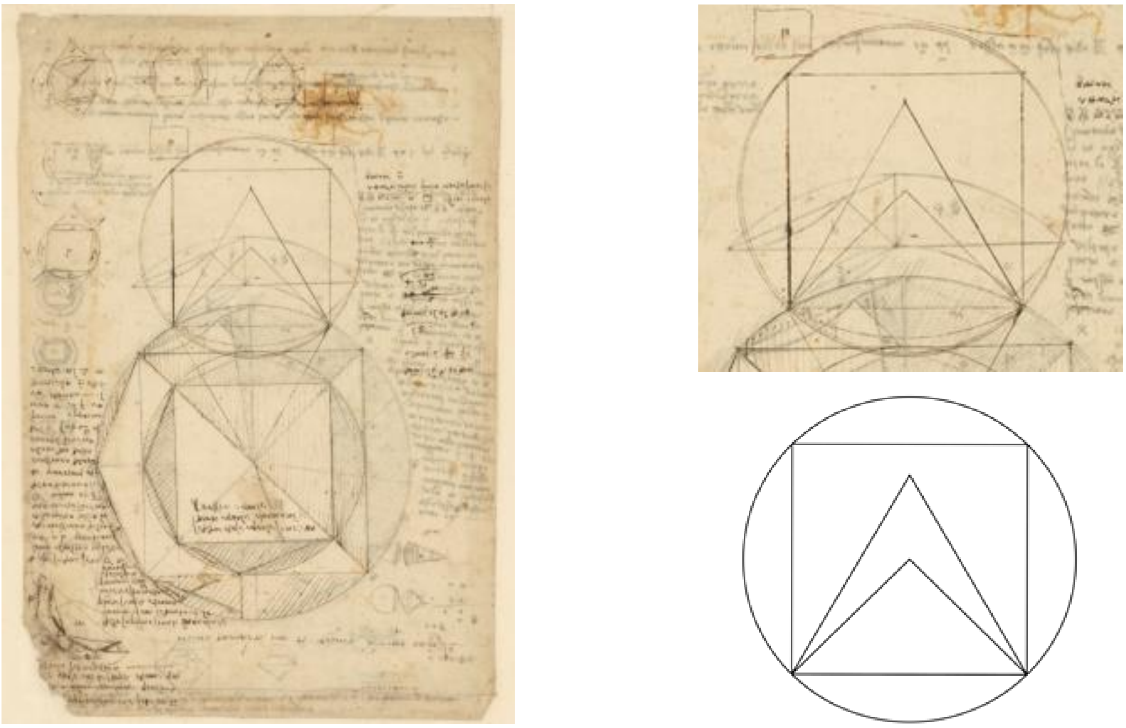

Figure 1 : *codex atlanticus*, fol. 1040 (recto)[6].

Mise en œuvre de la séquence

Nous avons mis en place une séquence de deux séances en CM1/CM2 et en 6e. Pour plus de détails sur la différence des mises en place et des consignes entre les CM1/CM2 et les 6e, on peut utilement consulter le classeur *canoprof* préparé par David Somdecoste et Chantal Fourest[7]. Nous donnons ici les grandes lignes des séances et les éléments d'analyse. Les deux séances ont permis de mettre en place plusieurs phases distinctes de l'observation, la réalisation, la confrontation à la rédaction d'un programme de construction.

Le temps d'observation est envisagé collectivement en CM1/CM2. Il a pour objectif de repérer, à partir de la projection de la figure 2 (tableau numérique ou simple tableau à craies/feutres), toutes les figures élémentaires qui constituent la figure complexe. Le débat oral collectif permet d'établir le tableau 1 qui servira aussi de synthèse à l'activité.

Figure	**Définition ou Propriété**	**Outils**
Cercle	- Centre - Rayon	Compas
Carré	- Longueur de côtés - Angles droits	Règle + équerre
Triangle équilatéral	3 côtés de même longueur	Règle + Compas
Triangle isocèle	2 côtés de même longueur	Règle + Compas

Tableau 1

[6] Image disponible pour un usage pédagogique sur http://www.gettyimages.fr/detail/photo/squaring-of-curved-surfaces-from-atlantic-codex-by-Léonardo-da-photo/120856796

[7] https://david-somdecoste.canoprof.fr/eleve/Irem%20Poitiers%20juin%202017/Séquence%20n°1%20Léonard%202017/index.xhtml

Il est aussi possible de distribuer à chaque élève la figure de Léonard. Cependant, si les élèves ont cette figure à leur disposition, ils sont amenés à mettre en place des stratégies où la mesure domine, et non plus les positions relatives des droites et les alignements de points. Étant donné notre objectif, nous pensons qu'il est préférable d'imposer une règle non graduée. Les reports de longueurs (pour les côtés du triangle) se font alors au compas : c'est là une utilisation experte du compas qui est explicitement visée au cycle 3[8].

Figure 2 : Utilisation de la mesure (règle graduée).

En 6e, la phase d'observation se fait individuellement, au sein du groupe de travail, avec une figure originale par élève. Il s'agit d'une observation « avec intention », c'est-à-dire qu'elle doit permettre de faire ressortir les figures élémentaires mais aussi les relations entre elles, avec les propriétés d'alignement et de la recherche des points d'intersection.

L'observation est essentielle tout au long du cycle 3 car c'est elle qui donne à l'élève tous les éléments pour reproduire une figure et qui lui permet, peu à peu, d'évoluer d'une géométrie des figures à la géométrie du point (Perrin et al. 2013).

Une fois le problème clairement défini, les élèves sont amenés à réaliser les constructions nécessaires sur papier blanc (feuille A4). Les élèves comprennent vite que l'ordre des étapes de construction des différentes figures élémentaires a des conséquences. En effet, si l'on débute par le cercle – attitude majoritaire car le cercle est la figure englobante –, il faut alors tracer un carré inscrit dans ce cercle. Les 6e en sont capables en passant par deux diamètres perpendiculaires ; ils correspondent alors aux deux diagonales du carré. Pour les élèves de CM1/CM2, c'est difficile (voire impossible) car peu d'entre eux connaissent la propriété des diagonales d'un carré[9]. Après quelques essais où le carré n'est jamais carré (*cf.* figure 4 : le cercle n'est clairement pas circonscrit au carré (tracé avec peu de précision), mais l'élève a tracé quatre arcs de cercles dont chacun a deux sommets du carré pour extrémités), les élèves comprennent qu'il est préférable de débuter par le carré, et tracer ensuite son cercle circonscrit.

---

[8] « Le report de longueurs sur une droite déjà tracée avec le compas peut être abordé au CE2 mais il relève surtout du cycle 3. » (*Bulletin Officiel Spécial* 11 du 26/11/15, Cycle 2, Mathématiques, p. 86)

[9] Pour éviter cette difficulté, on peut aussi choisir, pour certains élèves, de mettre en place une activité de « restauration de figures » en donnant, sur feuille blanche, le carré ou deux côtés de celui-ci. Il s'agit alors de compléter la figure (Perrin et *al.* 2013, 26 et suivantes).

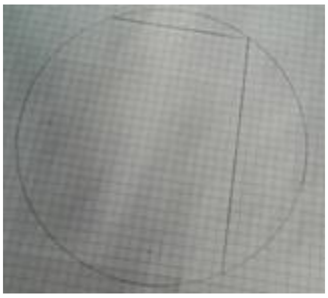

Figure 3 : Tracé difficile d’un carré inscrit dans un cercle.

Les élèves qui sont en difficulté pour tracer un carré sur papier blanc se voient proposer un papier quadrillé (petits carreaux). Les instruments autorisés sont la règle, l’équerre et le compas.

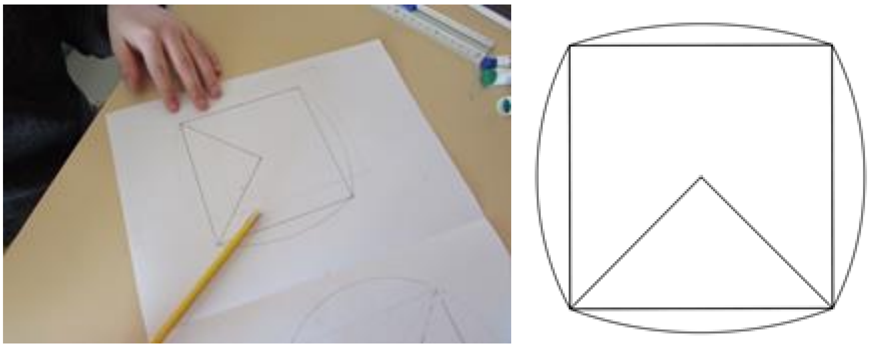

Figure 4 : Exemple de construction où les relations entre les figures ne sont pas respectées.

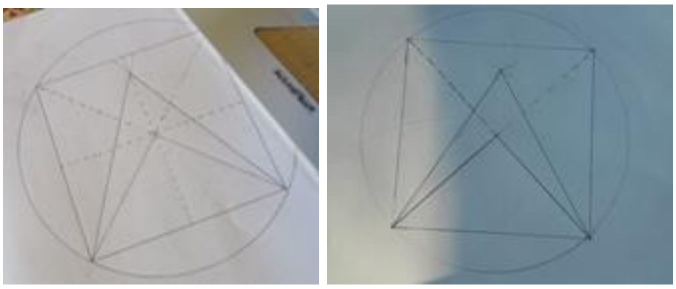

Figure 5 : Exemples de figures où les relations – alignements, milieux et centre – sont indiquées.

Pour réussir à rédiger un programme de construction de cette figure complexe, nous sommes passés par une narration de construction. Les élèves doivent alors rédiger un texte décrivant les différentes étapes de leur construction. Voici trois exemples de narration des élèves de 6^e :

> *Tout d’abord, j’ai tracé un carré de 4cm. Ensuite, tracé un triangle isocèle et un triangle équilatéral, qui eux sont tracés dans le carré. Puis, tracé un cercle qui a pour centre le sommet du triangle équilatéral.*
>
> *Tracer un carré de 5 cm de côté. Tracer les diagonales du carré. Puis tracer le cercle passant par les sommets du carré. Tracer un triangle équilatéral dont la base est le côté du carré. Ensuite, faites la même chose mais cette fois pour un triangle isocèle.*
>
> *Tout d’abord, j’ai tracé un carré. Ensuite, j’ai tracé les deux diagonales du carré pour trouver son centre. Ce centre sera le sommet du triangle rectangle qui aura les deux autres sommets du carré pour sommets. Et tracer un autre triangle mais équilatéral pour sommets les deux mêmes que ce que l’on avait utilisé pour le triangle rectangle. Enfin, tracer un cercle de rayon le milieu du carré et le sommet du carré.*

Cette étape a été réalisée à l'oral, en collectif, en CM2. À tous les niveaux, les élèves ont bien respecté la chronologie avec l'utilisation de connecteurs de temps. Ils ont en général utilisé le bon vocabulaire. On note néanmoins la confusion entre « milieu » et « centre » ou encore entre « milieu » et « moitié ». Aussi, beaucoup d'élèves se sont trouvés gênés pour rédiger leur texte sans avoir particularisé deux sommets du carré. Nommer certains points de la figure est alors fort utile, sinon indispensable.

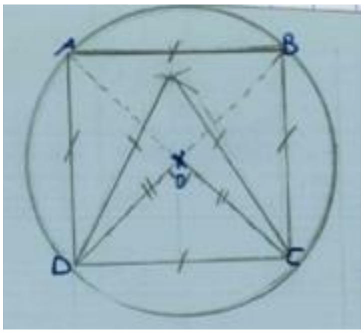

Figure 6 : Figure finale avec le nom de certains points utiles à la rédaction du programme de construction.

Voici, enfin, le programme de construction établi collégialement avec les CM2 et testé dans d'autres classes (CM1, CM2 et 6^e^). Les figures obtenues sont enfin comparées avec la figure originale de Léonard de Vinci pour validation.

> *Tracer un carré ABCD. Tracer les diagonales du carré. Elles se coupent en O. Tracer le cercle de centre O et passant par les points A, B, C et D. Tracer le triangle DOC. Tracer le triangle équilatéral de base DC, à l'intérieur du carré.*

En conclusion, la seule figure du feuillet 1040 (recto) du *Codex atlanticus* de Léonard de Vinci présente divers intérêts pour l'enseignement de la géométrie tout au long du cycle 3, ou en liaison CM2/6^e^. D'une part, elle ancre les savoirs mathématiques dans la pratique d'un célèbre polymathe et favorise l'interdisciplinarité. En outre, elle permet une approche de l'enseignement de la géométrie par la résolution de problèmes avec des éléments de différenciation faciles à mettre en place dans les classes. Pourquoi s'en priver ?

Doubler le carré avec Platon

Cette partie rend compte du travail du groupe de l'IREM de Paris, composé de Renaud Chorlay, Alexis Gautreau et Dominique Heguiaphal.

Objectifs d'enseignement

Nous proposons dans cette partie une séquence de trois séances, conçue et expérimentée en CM2 et en 6^e^, à partir d'un des problèmes les plus célèbres de l'histoire des mathématiques. Dans le dialogue intitulé *Ménon*, Platon (env. 427 – 348 avant notre ère) écrit un échange entre trois personnages, le philosophe Socrate, un noble athénien nommé Ménon, et un esclave au service de Ménon. Socrate part d'un carré (A) et demande à l'esclave de tracer un carré d'aire double. L'esclave trouve la question facile, et propose de doubler le côté du carré (état (B)). Socrate lui montre que cette solution est fausse : la figure (B) est bien un carré, mais son aire est quadruple de celle du carré (A), comme le montre la figure (C). Socrate relie alors quatre points de la figure (C), et affirme que le carré qui apparaît est – lui – double en aire du carré initial. Il le justifie en dénombrant dans les deux figures (A) et (D) les triangles rectangles isocèles que sont les demi-carrés : deux dans le carré (A), quatre dans le carré (penché) au centre de (D).

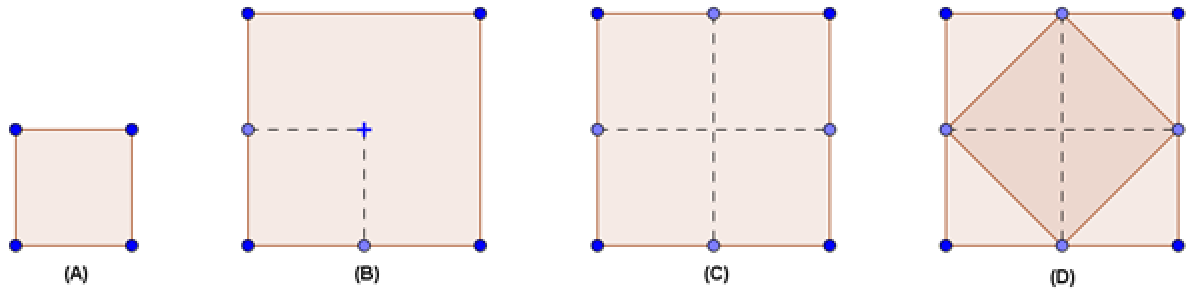

Figure 7 : Les figures successives du dialogue platonicien.

On voit que le problème porte sur des notions et des thèmes de travail fondamentaux au cycle 3 : utilisation d'un vocabulaire précis pour décrire des figures géométriques assez complexes ; caractérisation des quadrilatères usuels (en particulier, pour vérifier que le quadrilatère « penché » est bien un carré) ; comparaison d'aires, soit sans mesures – par découpage et recollement – soit en mesurant, tantôt avec des unités conventionnelles (ici le pied) tantôt avec des unités choisies en fonction de la situation (ici le demi-carré (A)). En outre, l'erreur de l'esclave permet de travailler sur deux obstacles épistémologiques : difficulté à distinguer dans une même figure plane deux grandeurs différentes (la longueur du contour, l'aire de la surface) ; non proportionnalité des longueurs et des aires dans les situations d'agrandissement/réduction.

Notre parti-pris dans la construction de séquence a été de faire travailler les élèves non seulement sur le *problème* du *Ménon* – doubler (en aire) un carré donné – mais sur le *texte* du *Ménon* (Platon 1967). Notre motivation était double.

Premièrement, cela nous semblait favoriser l'entrée dans le travail d'argumentation en géométrie, dans un contexte où l'on ne vise pas de « démonstration » au sens que ce terme prendra au cycle 4 : d'une part le texte est un texte de nature *argumentative* ; il présente des échanges d'arguments – entre Socrate et l'esclave – à propos de figures et de grandeurs. D'autre part, le travail confié aux élèves va consister non seulement à chercher la réponse au problème posé, mais aussi à s'approprier et évaluer les arguments échangés dans le texte.

La séquence que nous proposons n'est pas conçue comme une situation visant la découverte ou la première rencontre avec les notions en jeu, du moins pour ce qui est de la caractérisation instrumentée du carré, et de la comparaison d'aires avec ou sans mesures. Au contraire, la situation met régulièrement l'élève en situation d'*expert* devant s'appuyer sur la connaissance de ces notions non seulement pour chercher à résoudre un problème géométrique, mais aussi pour *reformuler* – voire critiquer – des formulations parfois éloignées des nôtres, ainsi que pour *évaluer* la qualité d'arguments proposés dans le texte.

Le lecteur pourra être surpris de ne pas voir dans notre séquence de travail *numérique* sur le côté du carré cherché. Cette approche a déjà fait l'objet de publications (Kosyvas & Baralis 2010).

Choisir de faire travailler les élèves sur le *texte* du *Ménon* c'est choisir de se confronter, en tant qu'enseignant, à cette difficulté du texte. Il ne s'agit pas là d'un caprice de notre part. Nous y sommes incités aussi bien par les programmes de Français que par les travaux de didactique du Français ; par ceux, en particulier, portant sur la compréhension de texte.

Nous avons cherché à concevoir la séquence en nous appuyant sur l'analyse des enjeux cognitifs et didactiques de la compréhension de texte tels qu'ils sont décrits par l'équipe des rédacteurs des manuels *Lector & Lectrix* (Cèbe & Goigoux 2009). Ils rappellent que « comprendre un texte » englobe plusieurs familles de savoir-faire : décodage du code écrit (le sens usuel de « savoir lire »), mise en œuvre de compétences linguistiques et textuelles (syntaxe, lexique, ponctuation, connecteurs etc.), de compétences référentielles (ici le texte porte – en grande partie – *sur* des objets mathématiques), enfin, de compétences stratégiques (régulation, contrôle et évaluation, par l'élève, de son activité de lecture). Cèbe et Goigoux soulignent :

> *S'il veut comprendre un texte, le lecteur doit mobiliser simultanément toutes ces compétences pour opérer deux grands types de traitement : des traitements locaux – qui lui permettent d'accéder à la signification des groupes de mots et des phrases – et des traitements plus globaux qui l'amènent à construire une représentation mentale cohérente de l'ensemble. (...) Ce dernier processus, appelé intégration sémantique, est cyclique : chaque ensemble d'informations nouvelles amène le lecteur à réorganiser la représentation qu'il construit pas à pas (...) Cela suppose qu'il soit suffisamment flexible pour accepter que ses premières représentations soient provisoires donc révisables*. (Cèbe & Goigoux 2009, 7)

La combinaison des difficultés relevant des mathématiques et de la compréhension de texte peut effrayer. Il nous appartient de prouver que nous avons été ambitieux mais pas téméraires. La séquence a été conçue par des enseignants expérimentés : Dominique Héguiaphal (CM2), Alexis Gautreau (6^{e}), Renaud Chorlay (formateur ESPE). Elle a été mise en œuvre en CM2 et en 6^{e} dans des classes « ordinaires » du 13^{e} arrondissement de Paris, au printemps 2017. Elle prend trois séances. Nous donnerons dans la suite quelques éléments sur le déroulement effectif dans les deux classes, en nous appuyant sur les traces écrites de recherche des élèves et les transcriptions des enregistrements audio des séances.

Mise en œuvre de la séquence

Il nous a semblé que le texte (Platon 1976, 344-352) pouvait assez naturellement être partagé en trois parties, chacune donnant lieu à une séance de travail d'environ une heure.

1re séance : présentation du contexte. Découverte du texte. Travail sur les unités de longueur et d'aire.

2^{e} séance : découverte du problème de duplication. Comparaison des réponses des élèves et de celle de l'esclave. Invalidation de la réponse par doublement du côté.

3^{e} séance : découverte de la réponse de Socrate. Validation ou invalidation par les élèves de cette réponse. Bilan sur la construction générale du texte et son sens philosophique.

Il ne saurait être ici question de présenter le déroulé des trois séances. Nous préférons illustrer deux moments particuliers, faisant ainsi deux « gros plans ».

Gros plan n° 1.

Dans le texte de Platon, Socrate parle d'un carré de « deux pieds de côté », et fait observer à l'esclave que l'« espace » du carré est de « quatre pieds ». Nous demandons aux élèves (en binômes) :

La phrase « L'espace est donc deux fois deux pieds » (20) est très importante. Prenez quelques minutes pour réfléchir, et préparer par écrit vos réponses aux deux questions:

- Pouvez-vous expliquer de quoi parle Socrate ?
- Êtes-vous d'accord avec lui ?

Vous pouvez faire des phrases, ou bien des figures à main levée ; vous pouvez colorier ; tout est autorisé.

Le déroulement dans les classes montre que les élèves identifient bien le fait que l'on parle de l'aire du carré. Nous reproduisons des extraits de trois copies de CM2 (Figure 8). La copie n° 1 est représentative de la réponse majoritaire ; beaucoup d'élèves, plus laconiques, valident par « oui, car 2×2 = 4 ». La copie n° 2 montre même un cas de représentation permettant d'accommoder l'ambiguïté du texte : les pieds dessinés désignent à la fois les longueurs (par leur côté le plus long) et – vraisemblablement – les pieds d'aire (par la partie de la surface sur laquelle ils sont dessinés). La copie n°3 montre un cas, rare, où l'élève rappelle le rôle du carré pour désigner l'unité d'aire. On voit que le bilan collectif est nécessaire pour montrer le caractère problématique de l'usage par Socrate d'un même terme pour désigner l'unité de longueur et l'unité d'aire associée. L'introduction du terme « pied carré » pour l'unité d'aire ne choque pas les élèves ; elle peut être proposée par certains. On peut aussi choisir de distinguer les « pieds de long » et les « pieds d'aire ».

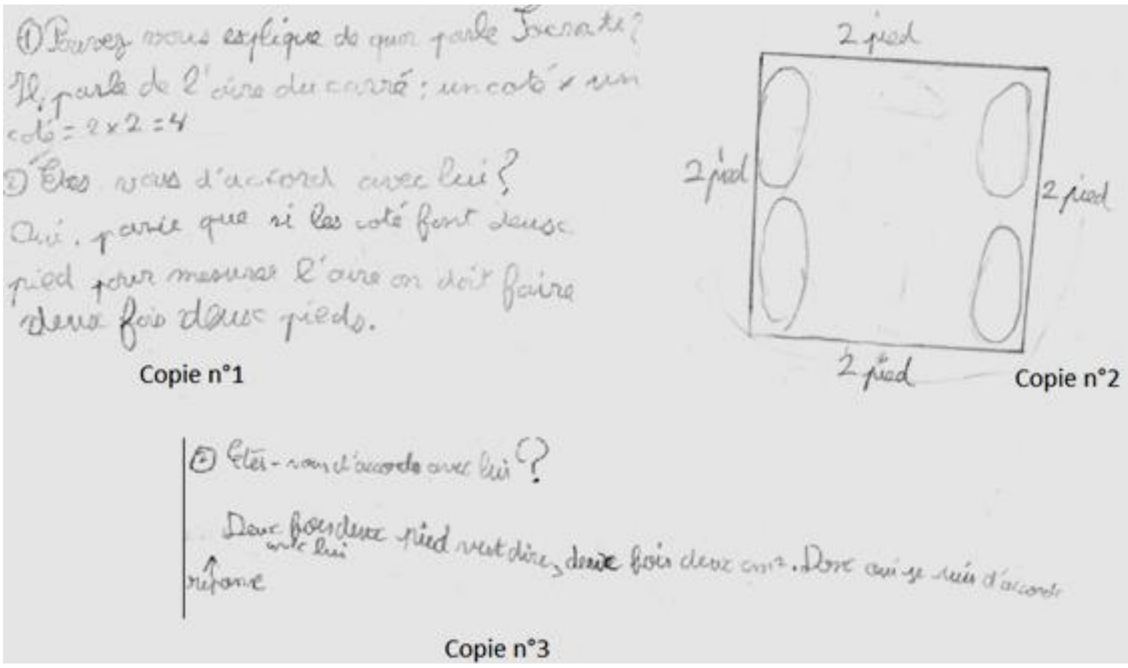

Figure 8 : Une aire de « quatre pieds » : qu'en pensent les élèves ?

Gros plan n° 2.

En début de séance n° 3, nous demandons aux élèves de rappeler quel est le problème posé à l'esclave. Après avoir présenté la solution de Socrate (mais pas sa justification), on convient avec la classe qu'il y a deux points à contrôler :

- Le quadrilatère « penché » qui apparaît au centre de la figure 1. (D) est-il bien un carré ?
- Si oui, ce carré est-il d'aire double de celle du carré initial ?

La première question n'a globalement pas posé problème aux élèves. La deuxième question était plus ouverte, et l'analyse *a priori* avait permis de déterminer une grande variété de procédures correctes pouvant être proposées et mises en œuvre par des élèves de CM2 et 6e. Nous avons mis en place un système de commande de « boîtes à outils » pour favoriser la variété des procédures.

Nous avons été surpris par deux points. Premièrement le peu de recours au cadre numérique : on pouvait imaginer que les élèves mesurent à la règle le côté du nouveau carré et appliquent – en calcul posé ou à la calculatrice – la formule de l'aire du carré. Deuxièmement, par la variété et la qualité des procédures ne passant pas par les longueurs. Nous donnons en figure 3 un échantillon des copies. Dans les deux copies du haut les élèves pouvaient découper, s'engageant ainsi dans des démarches non-numériques. Dans les deux du bas, aucun instrument n'était disponible ; on notera les choix différents d'unité d'aire entre les deux copies.

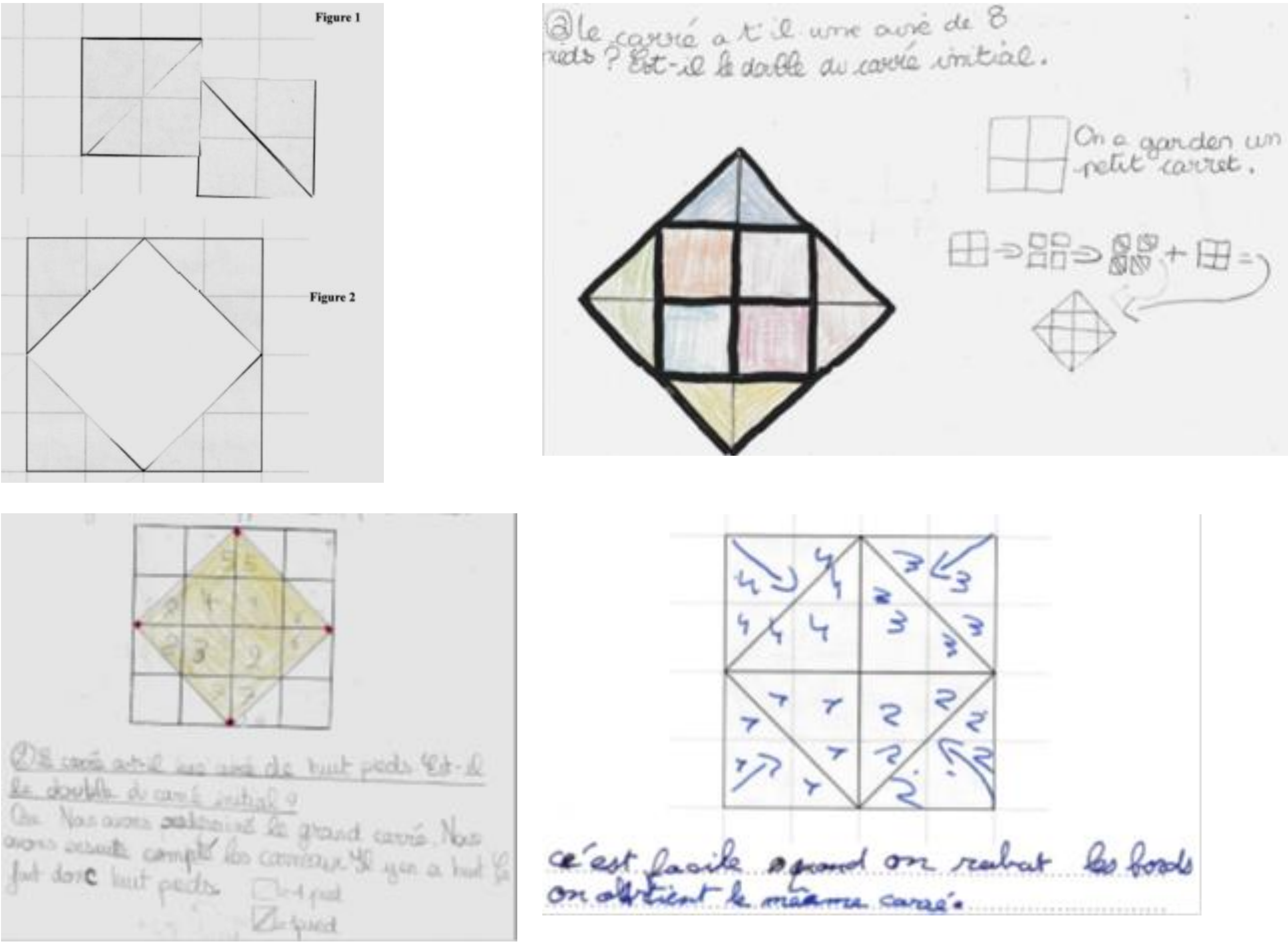

Figure 9 : Plusieurs justifications de la solution de Socrate.

Le compte rendu complet de cette expérimentation indiquera des prolongements possibles dans deux directions. D'une part, la version « maximaliste » testée en 2017, qui repose de manière essentielle sur la lecture de la source historique, contribue à la réflexion sur la compréhension de textes complexes – y compris scientifiques – et sur la pertinence d'outils venant de la didactique du Français. L'aspect exploratoire de cette première expérimentation permet, d'autre part, d'indiquer les contours d'une séquence plus resserrée, plus simple à mettre en œuvre sans toutefois sacrifier les objectifs fondamentaux relatifs aux notions mathématiques en jeu et à l'argumentation.

Différents aspects de la mécanisation du calcul

Cette partie rend compte des travaux du groupe de recherche de l’IREM de Brest « Instruments dans l’histoire et dans la classe ». Ont participé aux travaux de ce groupe entre février et juin 2017, Véronique Fustec, Yohan Lefèbvre, Yann Le Thénaff du collège Saint-Pol-Roux à Brest, Murielle Geslin de l’école du Champ-de-foire à Plougastel Daoulas, Marc Le Pors de la circonscription de Brest Ville et Frédérique Plantevin.

Le travail présenté porte sur la numération et le calcul des opérations, de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division des entiers naturels, par le biais d'instruments mécaniques qui les ont partiellement automatisées. Nous commençons par présenter les machines utilisées en les situant dans leur contexte historique. Les objectifs mathématiques que l'on peut poursuivre au cycle 3 autour de ces machines sont ensuite exposés. Du fait de la nature interdisciplinaire des objets étudiés et de la démarche suivie pour les utiliser, les activités peuvent permettre d'atteindre également des objectifs en technologie et en histoire ; ce point est explicité. La présentation de l'expérimentation et quelques éléments d'analyse de deux étapes de la séquence concluent notre exposé.

Instruments de calcul utilisés, contexte et fonctionnement

La mécanisation des quatre opérations arithmétiques commence au tout début du XVII^{e} siècle avec les inventions indépendantes de W. Schickard et B. Pascal. Leurs machines réalisent toutes deux les additions de nombres entiers avec un report automatique de la retenue. Elles reposent sur une représentation nouvelle des nombres entiers, par des roues graduées convenablement engrenées. À chaque ordre correspond une roue à dix dents[10], qui fait tourner celle de l'ordre suivant - placée à sa gauche – après un tour complet. La machine de Pascal, que l'on a appelée plus tard la Pascaline, a été le point de départ de très nombreuses tentatives pour améliorer le calcul automatique de l'addition et de la soustraction d'une part et d'autre part, pour permettre celui de la multiplication (Cargou et al 2012) et de la division[11]. Les deux machines avec lesquelles nous avons travaillé représentent un aboutissement dans ces deux directions, presque trois siècles plus tard. Il s'agit d'une additionneuse à roues appelée *Lightning calculator* (figure 10) construite dans le Michigan (USA) autour de 1930 selon un brevet[12] de 1926 et de plusieurs *multiplicatrices de type Odhner* fabriquées entre 1900 et 1960 selon un brevet original déposé en Suède en 1878, et en France[13] en 1892.

Figure 10 : Additionneuse *Lightning calculator*. (Crédit photo F. Plantevin)

[10] Pour la machine de Pascal, il serait plus juste de parler de tiges.
[11] L'invention de Schickard devance celle de Pascal d'une vingtaine d'année mais n'a certainement pas pu jouer le même rôle que cette dernière dans les progrès techniques car le seul exemplaire qui en a été construit a disparu dans un incendie et son existence a été oubliée jusqu'au XX^{e} siècle.
[12] Brevet US 1,574,249 déposé par R.W. Hook ; on peut l'obtenir par une recherche simple sur la toile à partir du numéro de brevet (patent) ; un exemple de site dédié à cette machine est indiqué dans la sitographie ; le brevet était fourni pendant l'atelier et est accessible sur l'espace dédié du site du colloque.
[13] Brevet pour la France de quinze années n° 225.162 déposé par W.T.Odhner.

L'additionneuse à roues *Lightning calculator* est une machine de bureau, compacte et assez ergonomique, peu chère, qui a été fabriquée jusqu'en 1960. D'apparence simple, sa sophistication tient à la compacité de ses mécanismes (que l'on peut observer dans le brevet), enfermés dans un boîtier d'un demi-centimètre d'épaisseur et à leur fiabilité. Les modèles ultérieurs permettront également de réaliser les soustractions, ce qui n'est pas le cas de celle-ci. Pour réaliser une addition, l'opérateur entre les chiffres de chaque opérande au moyen du stylet. Pour entrer 40, le stylet est inséré dans la deuxième roue en partant de la droite, en face de la graduation 4 et amené contre la butée - en face du 0 du cadran, en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre tout en maintenant le contact avec la roue. Le chiffre 4 apparaît dans la fenêtre correspondant à cette roue. Tous les chiffres des deux opérandes sont entrés successivement, le résultat est lu dans les fenêtres.

Figure 11 : Multiplicatrice Original Odhner. (Crédit photo F. Plantevin)

Les *multiplicatrices de type Odhner* (c'est-à-dire les machines originales et tous leurs clones construits selon le même principe à l'extinction du brevet) réalisent la multiplication par additions répétées. La machine d'Odhner n'est ni la première machine à le faire, ni même la première à être fabriquée industriellement, mais c'est celle qui a été la plus produite et la plus répandue et ce, jusque dans les années 1970. Les multiplicatrices sont en fait des additionneuses mais rendues efficaces par l'ajout de deux pièces : l'entraîneur et le chariot. L'entraîneur permet d'actionner toutes les roues en même temps et donc de mener l'addition de tous les chiffres des deux opérandes en même temps ; le chariot permet de multiplier par dix par un simple décalage de la partie d'inscription de la machine par rapport à celle qui porte les résultats (appelée totalisateur). Ces deux améliorations essentielles sont dues à G.W. Leibniz dès la fin du XVII^{e} siècle (Leibniz 1710). L'entraîneur de Leibniz utilise un cylindre portant des cannelures inégales en longueur (figure 12). Ce cylindre coulisse sur son axe en fonction du choix de l'inscripteur. La rotation d'une roue dentée, en liaison avec le totalisateur, engrenée sur ce cylindre dépend donc directement de sa position sur celui-ci et donc du chiffre entré sur l'inscripteur. Deux autres types d'entraîneur seront inventés ensuite, dont celui de Odhner, dit à nombre variable de dents. Dans ses machines, l'inscripteur entraîne une came qui fait ressortir un nombre variable de dents sur une roue. La rotation de cette roue actionnée par l'opérateur n'entraînera le mécanisme que pour le nombre de dents sélectionnées par la position de l'inscripteur. On peut voir les dents des dix entraîneurs Odhner – un par ordre – de l'écorchée de la figure 12.

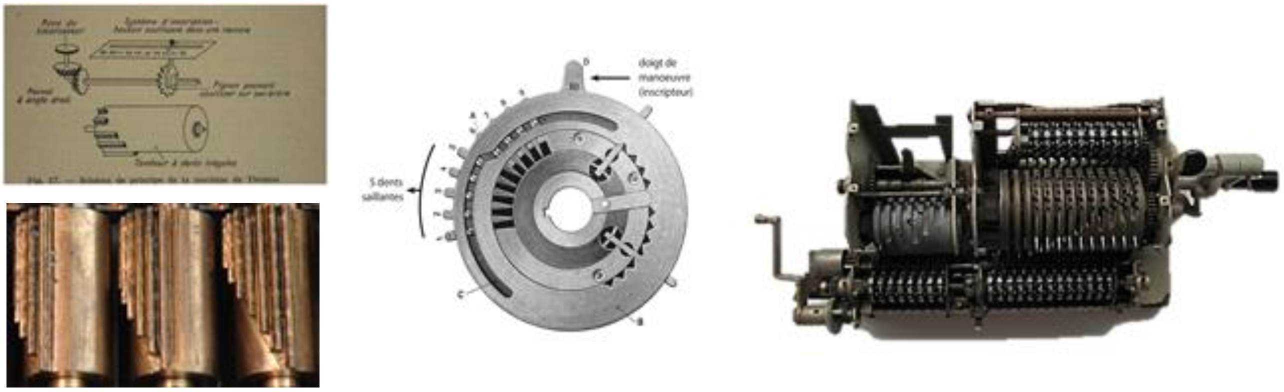

Figure 12 : Schéma de fonctionnement de l'entraîneur de Leibniz et photo de trois cylindres à dents cannelées – Schéma explicatif d'un entraîneur Odhner – Multiplicatrice Odhner écorchée. (Images extraites des panneaux de l'exposition « Multipliez »).

Ainsi, pour réaliser une multiplication avec ces machines, il faut inscrire les chiffres du premier nombre et tourner la manivelle un nombre de fois égal au chiffre des unités du multiplicateur, puis décaler le chariot d'un cran vers la droite et tourner la manivelle un nombre de fois égal au chiffre des dizaines du multiplicateur, et ainsi de suite jusqu'à épuisement des chiffres. Le résultat se lit directement dans les fenêtres du totalisateur.

Cette famille d'instruments permet d'aborder une grande variété de questions dans de nombreux champs. Lors des ateliers de l'exposition « Multipliez »[14], nous avons pu constater l'intérêt d'un tel travail avec les élèves des classes d'école, de collège et de lycée (Le Brusq & Plantevin 2012). Cela nous a permis de dégager les premières idées d'exploitation en classe de mathématiques.

Objectifs mathématiques que l'on peut poursuivre au cycle 3 autour de ces machines

Les objectifs en mathématiques sont multiples. D'une part, retravailler sur la numération grâce à la représentation des nombres que proposent les additionneuses. Pour ce faire, nous pensons utile d'analyser le fonctionnement d'une de ces machines puis d'en construire un prototype afin de permettre aux élèves de s'approprier réellement l'instrument. On peut ainsi faire le lien entre cette représentation et les opérations d'addition puis de soustraction, qui sont donc effectuées par la rotation des roues dans un sens ou dans l'autre, pour peu que l'engrenage permette le transfert automatique de la retenue entre deux ordres. Cette revisite du programme du cycle 2 permet d'une part, de comprendre le principe de la mécanisation de l'addition (problématique technologique) qui repose, comme on vient de le dire, sur des concepts mathématiques, et d'autre part, de travailler sur la représentation et l'addition des grands nombres (en « ajoutant » le nombre de roues nécessaires) et des nombres décimaux (en « ajoutant » un repère physique représentant la virgule à la droite de la roue que l'on désire être celle des unités). On peut également travailler sur l'écriture en ligne des calculs réalisés et par là, sur l'associativité et la commutativité de l'addition.

D'autre part, en s'appuyant sur la première activité, on peut ensuite travailler sur l'automatisation de la multiplication et celle de la division euclidienne. La mise en œuvre de la multiplication par additions répétées par ces machines s'appuie sur l'associativité de l'addition et la distributivité de la multiplication sur l'addition tout autant que sur l'écriture en base 10 des nombres puisque pour calculer

$$65 \times 47 = 65 \times (4 \times 10 + 7),$$

[14] L'exposition retrace l'histoire du calcul de la multiplication et en particulier celle de sa mécanisation.

la machine réalise en fait

$$65 \times 47 = 65 \times 10 \times 4 + 65 \times 7 = 650 \times 4 + 65 \times 7 = \underbrace{650 + \cdots 650}_{4\ \text{fois}} + \underbrace{65 + \cdots + 65}_{7\ \text{fois}}$$

Comprendre l'instrument, c'est être capable d'écrire cela, ce qui en fait un outil intéressant pour le chapitre « Nombres et calculs » du cycle 3.

La multiplication par 10 est réalisée par un décalage physique d'une partie de la machine et les additions répétées successives sont réalisées par autant de tours de manivelles que la somme des chiffres du multiplicateur. Une additionneuse « simple », comme la Pascaline, ferait

$$65 \times 47 = \underbrace{65 + \cdots + 65}_{47\ \text{fois}}$$

c'est-à-dire quarante-sept manipulations identiques dont chacune consiste à entrer deux chiffres soit quatre-vingt-quatorze gestes, pendant qu'avec la multiplicatrice, il suffit de onze tours de manivelles, plus deux manipulations pour entrer les deux chiffres de 65, soit treize manipulations. Ce petit calcul de complexité illustre clairement l'évolution des machines à calcul entre additionneuse et multiplicatrice, et permet de rencontrer, dans un cas simple mais pertinent, la notion de complexité, si importante pour caractériser les algorithmes de calculs sur ordinateur.

En ce qui concerne la division, suivons le même raisonnement que pour la multiplication et écrivons en ligne le calcul réalisé par la machine lorsque l'on exécute des soustractions répétées de 15 à 47 par exemple. On obtient,

$47 - 15 - 15 - 15 = 2$, c'est-à-dire $47 - 3 \times 15 = 2$ ou encore $47 = 3 \times 15 + 2$.

2 est le résultat de l'opération, 3 est le nombre affiché par le compte-tours, la machine sonne lorsque le manipulateur cherche à soustraire 15 à un nombre plus petit : elle permet donc de matérialiser quotient et reste de la division euclidienne et automatise l'arrêt de la division c'est-à-dire contrôle la positivité du reste. Le travail s'enrichit lorsque le dividende est nettement plus grand que le diviseur par l'utilisation du décalage du chariot et débouche très naturellement sur la division décimale par un entier avec un nombre de décimales prescrit au départ.

Objectifs interdisciplinaires en technologie, en histoire

Comprendre comment l'automatisation du calcul se réalise puis la mettre en œuvre, peut être abordé aussi bien en mathématiques qu'en technologie et peut être profitable aux deux matières. Pour cela, il faut que les mathématiques utilisées soient explicitées avec le vocabulaire adéquat et la précision requise, et que dans chaque classe, ce qui, dans l'activité menée en commun ou dans la classe de l'autre mais qui relève de sa discipline soit revu et réinvesti. Regardons de plus près les objectifs possibles pour la technologie puis pour l'histoire.

L'analyse et la description d'objets techniques et la conception de « tout ou partie d'un objet technique pour traduire une solution technologique répondant à un besoin », sont au cœur du thème « Matériaux et objets techniques » de l'enseignement de Sciences et techniques du cycle 3. Elles sont toutes deux traitées par l'activité proposée. L'étude comparée de différents clones de multiplicatrices Odhner, peut permettre d'introduire la notion d'évolution technologique. Elle peut aussi donner l'occasion de présenter aux élèves les brevets des machines utilisées.

L'industrialisation des modes de production est une composante importante de l'histoire de ces machines. C'est X. Thomas de Colmar qui a, le premier, amélioré la machine de Leibniz en matière de fonctionnalité et de fiabilité mais aussi pour qu'elle puisse être fabriquée selon des procédés industriels. Ce travail de mise au point lui a pris trente et une années, entre son premier brevet (1820) et le début de la production industrielle de son arithmomètre (1851). Etudier son parcours et son travail sur ses machines est une illustration pertinente de la Révolution industrielle, qui est au programme d'histoire du CM2. On peut aussi s'intéresser à l'évolution des méthodes de production de certaines des usines de fabrication des clones de machines Odhner au cours du XX^e^ siècle (par exemple Brunsviga, pour laquelle, il est relativement facile de se procurer des ressources variées). Le programme d'histoire en 6e ne peut pas être relié directement à l'activité proposée mais la mise en place de repères historiques chez les élèves est un des objectifs du cycle 3. La séquence peut y contribuer.

Le choix de cette activité, qui mêle mathématiques et technologie, en plus de celui de travailler sur des ressources historiques susceptibles d'impliquer également l'histoire n'est pas seulement le reflet d'une curiosité des membres de ce projet. Nous pensons qu'il est fructueux de développer les aspects concrets des mathématiques pour aider les élèves à mieux les comprendre. Nous avons constaté que certains élèves montrent une sorte d'intuition ou d'intelligence pratique en manipulant et en créant eux-mêmes des objets techniques. Il nous semble que ce talent est un ressort possible pour l'apprentissage des mathématiques reliées et qu'il devrait être encouragé par des activités bien choisies.

L'activité que nous proposons est clairement au croisement de trois disciplines : elle requiert les apports de chaque discipline et construit des connaissances chez les élèves dans chaque discipline, de façon cohérente avec les programmes du cycle. Au collège, et aussi à l'école, si le professeur a choisi de segmenter son enseignement par discipline, la séquence telle qu'elle est conçue devrait se dérouler sur les créneaux de mathématiques et de technologie ; le cas de l'histoire peut être traité différemment pour les raisons déjà mentionnées.

Introduction à l'expérimentation et exemples de mise en œuvre de la séquence

L'expérimentation a été menée dans trois classes de 6^e^ avec de petites variations Ci-dessous, nous présentons les grandes lignes de la séquence et quelques éléments sur deux points plus précis en nous appuyant sur les productions des élèves collectées au cours des expérimentations (films ou enregistrements des discussions des phases de recherche, photographie et film des prototypes réalisés). Ce qui est présenté ici correspond également à ce qui a pu être fait pendant l'atelier, qui ne représente qu'une toute petite partie de ce qui a été fait en classe. Les annexes, qui sont les documents distribués lors de l'atelier, correspondent à une partie des énoncés des séances faites en classe. Elles sont accessibles sur l'espace dédié sur le site du colloque.

La séquence se déroule en deux grandes étapes ; l'une porte sur l'additionneuse et l'autre sur les multiplicatrices. Le déroulé de ces deux étapes est le suivant :

- comprendre comment l'addition des nombres est « automatisée » en étudiant l'additionneuse présentée plus haut (*cf*. Annexe 1, énoncé de cette séance), en conjecturant son fonctionnement interne puis en construisant une additionneuse à roues qui puisse additionner des nombres à trois chiffres (et dont le résultat ne dépasse pas trois chiffres) avec un report automatique de la retenue entre chaque ordre. L'idée de ce prototype s'inspire de la machine à calculer proposée dans l'ancienne revue *Bibliothèque de Travail* (Pellissier 1965). Cette partie se déroule en mathématiques et en technologie avec si possible des moments de co-animation. En mathématiques, la découverte de l'additionneuse et le début de la construction du prototype représentent trois heures de travail. La fin de la construction en technologie peut être menée en deux heures selon la finition et la fonctionnalité que l'on souhaite obtenir.

- découvrir les multiplicatrices, leurs fonctionnalités en réalisant des additions, puis des additions répétées, identifier où l'on peut lire les opérandes ; préciser en quoi elles diffèrent des additionneuses à roues d'un point de vue mathématique/algorithmique (opérations réalisées) et technologique (manière de les réaliser) : mettre en évidence le principe de l'entraîneur et le rôle du chariot (le relier au décalage de la multiplication par un nombre à plus d'un chiffre dans le calcul posé) ; les utiliser pour réaliser des calculs de multiplication de nombres assez grands ; procéder de la même façon pour les soustractions et la division euclidienne. Cette partie s'appuie sur l'énoncé proposé en Annexe 2 (« Travail avec une multiplicatrice »). Il était complété par des questions en direct et un travail sur les brevets (extraits en Annexe 3 et Annexe 4) et des catalogues d'exposition comme celui de l'exposition déjà citée (Cargou et *al.* 2012).

Pour illustrer la mise en œuvre en classe et ce qu'elle peut produire, deux points de la première étape de la séquence sont détaillés ci -dessous.

Découverte de l'additionneuse *Lightning calculator*

Le but de cette séance est d'identifier et de nommer les différentes parties de l'instrument, de débattre et conjecturer un fonctionnement possible après que quelques calculs auront été menés avec cet instrument devant la classe. Un document (Annexe 1) a été mis au point pour guider l'analyse de l'instrument et recueillir les hypothèses quant à son fonctionnement. Il a été utilisé de deux manières différentes dans les classes, dans l'une distribué dès le début de cette séance, dans l'autre après un moment assez long de débat en classe entière. Dans les deux cas, il n'a pas totalement rempli le rôle attendu ; probablement est-il simplement trop long.

Ci-dessous, nous vous présentons quelques extraits des échanges entre professeurs et élèves pendant cette séance de découverte, menée en débat libre pour commencer, avant d'utiliser le document comme synthèse. De nombreux calculs ont été faits par le professeur, puis par les élèves (*cf.* figure 13) ; pour poursuivre le débat, le professeur pose la question : « On a fait des additions, même des soustractions, alors, qu'est-ce qu'il y a là-dessous à votre avis ? »

Figure 13 : Calculs.

Tous affirment sans hésiter qu'il y a des engrenages[15], mais aller plus loin n'est pas évident ; de plus, comme le travail d'identification des différentes parties de l'instrument n'a pas été fait à ce moment-là, les élèves manquent de vocabulaire, ce qui les empêche, pensons-nous, d'imaginer comment ce qu'ils voient pourrait fonctionner. Mais pas tous, voici un échange :

Élève 1 : *Moi, je pense que ça* [il montre la roue des unités]*, c'est un engrenage mais c'est juste qu'il y a des trous pour pouvoir les tourner et les dents de l'engrenage font tourner les autres engrenages.*

Nombreuses discussions sur les engrenages, les roues, puis le professeur dit : « Et les chiffres dans l'histoire ? »

Élève 2 : *Les chiffres sont sur une sorte d'engrenage qui doit tourner en fonction de l'engrenage qu'on tourne là* [il montre la roue d'inscription du chiffre des dizaines correspondant à la fenêtre du chiffre des dizaines du résultat] *pour que ça donne le chiffre qu'on veut.*

Le professeur dit : « Tu peux expliquer ? Je n'ai pas bien compris. »

Élève 2 : *En fait, je pense que les chiffres sont écrits sur une petite roue qui est raccordée à celle qu'on est censé tourner pour qu'on ait le chiffre qu'on veut après.*

Élève 3 : *Ah oui, par exemple quand on fait tourner celle-là de 1* [il montre une fenêtre du résultat], *ça fait tourner pile d'un cran.* [il montre la roue d'inscription de même ordre]

À l'issue de cette discussion, et bien que l'élève 3 ait interverti l'ordre logique des choses, presque toutes les parties essentielles de la machine ont été identifiées : la roue qui tourne sous chaque cadran possède des dents (il n'a pas été dit qu'il y en avait 10), elle entraîne une petite roue qui affiche le résultat correspondant au nombre de crans dont on a tourné la roue, la roue qui tourne sous le cadran est aussi connectée à la roue sous le cadran de gauche de façon à l'entraîner au bout de dix « crans » (il n'a pas été dit explicitement à ce moment-là qu'ainsi la retenue était reportée automatiquement). Il reste à installer un vocabulaire précis qui permette d'expliciter complètement ce que l'on a compris. Cette phase de synthèse n'est pas décrite ici.

Construction d'un prototype d'additionneuse

Lors de la séance suivante, il est proposé aux élèves de fabriquer leur propre additionneuse à roues avec du matériel mis à leur disposition, par groupe de trois ou quatre. Le matériel fourni est constitué d'un ensemble de trois roues à dix dents, trois roues à une dent de même diamètre extérieur, trois disques de diamètre égal au diamètre intérieur des roues à dents, toutes les neuf réalisées dans un carton type plume, de même épaisseur (pas trop tendre pour résister, pas trop dur pour pouvoir être coupé), trois clous, une planche, des punaises, des gommettes, un cache rectangulaire, des graduations préparées mais non remplies. Dans un premier temps, il est demandé de réaliser une additionneuse à deux roues fonctionnelle puis à trois et enfin de s'occuper de la finition avec la graduation et le cache. Voici quelques productions des élèves commentées :

Les photographies des figures 14 à 16 illustrent la variété des solutions élaborées par les élèves, qui répondent toutes au moins au début de la consigne pour l'addition des nombres à deux puis à trois chiffres. On remarque la place des chiffres sur les roues ou sur le cadre fixe – ce qui induit deux fonctionnements différents –, l'empilement des roues sur deux ou trois niveaux pour coordonner

[15] Le cours de technologie sur les engrenages a été fait la semaine précédente.

trois roues. On note le sens opposé des graduations de deux roues successives, la présence des punaises qui tiennent ensemble les roues empilées. Regardons d'un peu plus près.

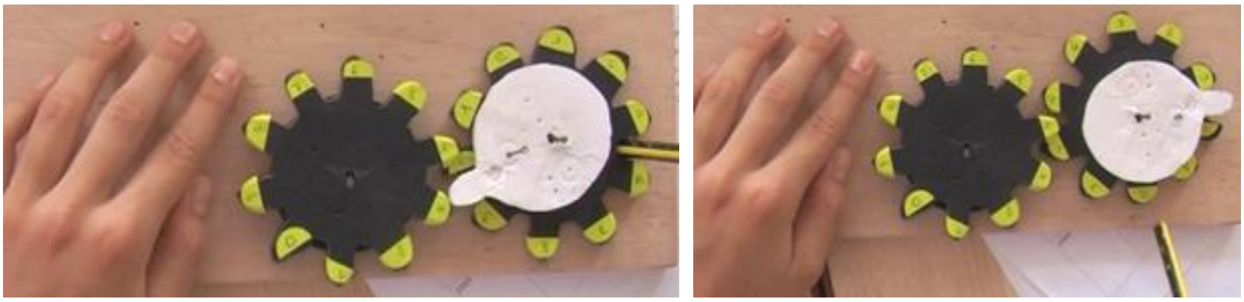

Figure 14 : prototype 1 dans le calcul de 7+5 et la lecture du résultat.

Les photographies de la figure 14 montrent la réalisation du calcul 7+5=12 par un élève concepteur. On voit le repère 0 de chaque roue sur la planche (indiqué par une petite flèche), la place de la roue à une dent chargée d'assurer la transmission de la retenue entre 9 et 0 et on devine que le sens de rotation de la première roue est le sens trigonométrique. La graduation est sur les roues, l'élève compte les angles élémentaires de rotation en même temps qu'il tourne avec son crayon.

La figure 15 montre le prototype dans la phase suivante de réalisation sur trois ordres. On observe que l'élève a choisi de graduer sa roue des unités en utilisant une roue à dix dents (ce n'est pas un cadran cependant, car la roue de graduation est solidaire de la roue à une dent), il a donc besoin de trois niveaux de roues pour que son prototype fonctionne. On remarque enfin que le sens de rotation de chaque roue est indiqué sur le support, ce qui permet d'entrer correctement les opérandes. On constate que la roue à une dent des unités a glissé de sa position correcte (comparer avec la figure 14).

Figure 15 : prototype 1 avec trois roues.

Les prototypes de la figure 16 proposent des graduations sur le support (c'est-à-dire le cadre). Le prototype 2 présente une sorte de graduation mixte, en particulier pour la roue des centaines (0 et 1) : le 0 devrait également être indiqué sur le support.

Figure 16 : prototypes 2 et 3.

Dans la logique de conception de ces deux prototypes ainsi que les suivants (figure 17), l'origine de la graduation est donnée par le sens de rotation choisi pour la première roue et la « position 0 » de cette roue (à une dent des unités), qui doit s'engrener avec la roue des dizaines à chaque tour complet. Ici, la roue des unités tourne donc dans le sens trigonométrique pour ces deux prototypes et la « position 0 » de la dent des unités est donc juste après (avec l'orientation indiquée) l'endroit où elle s'engrène avec les dents de la roue suivante. Rien n'oblige cependant à choisir comme graduation 0 d'une roue, la « position 0 » de la dent unique (comme il est fait sur le prototype 4) mais il est essentiel de repérer sur la roue cette fameuse position pour graduer correctement. Pour mener le calcul 7+5=12 avec une telle graduation, le manipulateur plante un pointeur (ici un clou ou une pointe de compas) en face de la graduation 0 et fait tourner la roue en gardant le pointeur dans la roue jusqu'à ce qu'il soit en face de 7 puis plante le pointeur en face de la graduation 0 et fait tourner la roue en maintenant le pointeur dans la roue jusqu'à ce qu'il soit en face de la graduation 5. On lit le résultat sur la graduation qui fait face au repère (sur la roue) de la position 0.

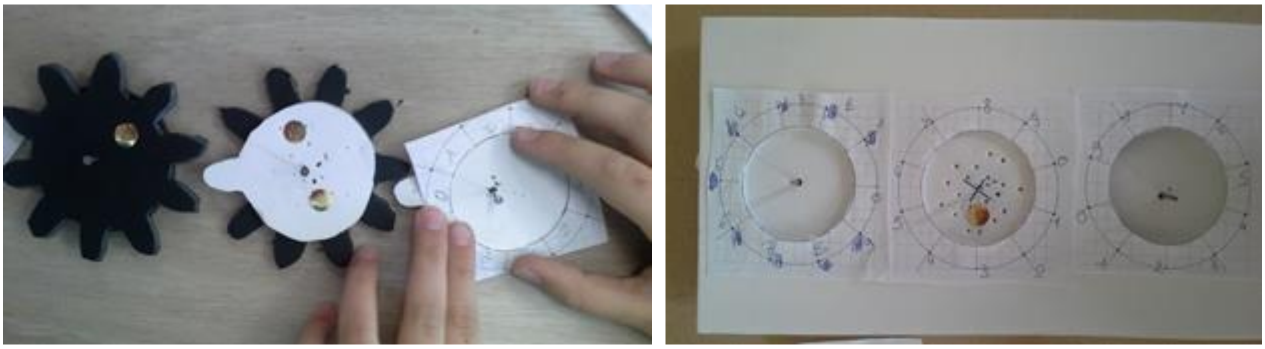

Figure 17 : prototypes 4 et 5 dans la dernière étape de fabrication – Pose du cadre gradué.

La dernière partie de l'activité consiste à réaliser un cache gradué pour utiliser le prototype comme une véritable additionneuse. La figure 15 montre deux étapes de cette construction ; on observe les ratures sur la graduation de la troisième roue du prototype 5 qui avait été graduée dans le même sens que la roue précédente alors qu'elle tourne (et donc compte) dans le sens opposé.

Comme on le devine grâce à l'étude de ces prototypes, cette activité présente plusieurs points assez subtils qui obligent à un va et vient entre expérimentation, connaissance de l'opération et compréhension profonde de la numération décimale de position ; elle permet à chaque élève de chercher une solution à la fois personnelle (voir la diversité des prototypes) et universelle (car elle doit répondre à un cahier des charges précis) ; enfin, elle amène les élèves à débattre et à examiner les idées de chacun au sein de leur groupe puis à expliquer aux professeurs la solution retenue.

Pour les séances en classe, comme pour l'atelier du colloque d'ailleurs, nous avons bénéficié du prêt d'instruments que l'on pouvait manipuler[16]. Il est évidemment préférable d'avoir la possibilité d'utiliser ces machines, de faire des calculs avec, pour pouvoir s'en approprier le fonctionnement. Mais en avoir à sa disposition peut être difficile (bien qu'elles soient assez répandues encore de nos jours), aussi avons-nous réfléchi à l'utilisation de vidéos dédiées pour accompagner la séquence entière. Elles sont en cours de test.

[16] Que les collectionneurs propriétaires de ces instruments en soient encore remerciés !

Conclusion

Nous avons saisi l'opportunité du colloque « Mathématiques en Cycle 3 » pour présenter (voire expérimenter avec les collègues enseignants, formateurs, conseillers pédagogiques et inspecteurs) différentes activités créées dans le cadre du projet « Passerelles : les mathématiques par leur histoire au cycle 3 ». Ainsi, nous avons proposé de nouveaux supports d'enseignement des mathématiques pour le cycle de consolidation en intégrant une perspective historique et/ou philosophique. Centrées sur la discipline mathématique, ces diverses activités sont aussi envisagées avec de nombreux croisements interdisciplinaires (avec le français, l'histoire et la géographie ou la technologie) en s'intéressant aux principaux obstacles et difficultés des élèves à partir de certaines de leurs productions et des travaux didactiques.

Références

Barbin, É. (2010). *De grands défis mathématiques d'Euclide à Condorcet*. Paris : Vuibert.

Barbin, É. (2012). *Les mathématiques éclairées par l'histoire: des arpenteurs aux ingénieurs*. Paris : Vuibert ADAPT-SNES.

Cargou C., Cargou M.-P., Plantevin F. (2012). *Multipliez ! Instruments de calcul de la multiplication. 200 ans de génie, 200 ans d'industrialisation*, (Préface de D. Tournès). Brest : Éd. IREM de Brest.

Cèbe, S., Goigoux, R. (2009). *Lector & Lectrix. Apprendre à comprendre les textes narratifs. CM1-CM2-6^{e}-Segpa*. Paris : Retz.

Cerquetti-Aberkane, F., Rodriguez, A. (2002). *Faire des mathématiques: avec des images et des manuscrits historiques du cours moyen au collège*. Champigny-sur-Marne : CRDP de l'académie de Créteil.

Cerquetti-Aberkane, F., Rodriguez, A., Johan, P. (1997). *Les maths ont une histoire: activités pour le cycle 3*. Paris : Hachette éducation.

Djebbar, A., de Hosson, C., Jasmin, D. (2009). *Les découvertes en pays d'Islam*. Paris : Édition Le Pommier.

Duval R., Godin M., Perrin-Glorian M.J. (2005). Reproduction de figures à l'école élémentaire. In Castela C., Houdement C. (Éds) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, pp. 5-89, Paris : ARDM, IREM Paris 7.

Jasmin, D., Brenni, P. (2004). *L'Europe des découvertes*. Paris : Édition Le Pommier.

Keskessa B., Perrin-Glorian M.J., Delplace J. R. (2007). Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur des figures de géométrie. *Grand N*, 79, 33-60.

Kosyvas, G., Baralis, G. (2010). Les stratégies des élèves d'aujourd'hui sur le problème de la duplication du carré. *Repères IREM*, 78, 13-36.

Le Brusq C., Plantevin F. (2012). Exploitation pédagogique d'une exposition d'instruments de calcul. In *Actes du XXXIX^{e} colloque COPIRELEM Quimper*. Brest : Éd. IREM de Brest

Leibniz, G.W. (1710). Brevis descriptio Machinæ. In *Miscellanea Berolinensia*, 1710, pp. 317-319. Traduction en français par C.C. Adam. Disponible sur www.bibnum.fr

Moyon, M. (2009). Quand les zelliges entrent dans la classe... Étude de la symétrie. In Djebbar, A., de Hosson, C., Jasmin, D. *Les découvertes en pays d'Islam*, pp. 111-126. Paris : Édition Le Pommier. Disponible sur http://www.fondation-lamap.org/fr/decouvertes-islam

Offre, B., Perrin-Glorian, M.J. et Verbaere, O. (2006). Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Petit x*, 72, 6-39.

Pellissier, M. (1965). Construis une machine à calculer (addition et soustraction), *Supplément au n°612 de Bibliothèque de Travail*, 189.

Perrin-Glorian, M.-J., Mathé, A.-C. et Leclercq R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM*, 90, 5-41.

Platon (1967). *Protagoras ; Euthydème ; Gorgias ; Ménexène ; Ménon ; Cratyle* (trad. et notes E. Chambry). Paris : Garnier-Flammarion. Disponible en ligne sur http://gallica.bnf.fr

Vitrac, B. (2004). Les géomètres de la Grèce antique. *Pour la Science : Les génies de la science* 21.

The lightning adding machine, https://www.jaapsch.net/mechcalc/lightning.htm#patents, consulté en novembre 2017 – site en langue anglaise.