At 14 : Géométrie au cycle 3 : de la reproduction de figures avec des gabarits aux constructions à la règle et au compas

Marie-Jeanne Perrin-Glorian[1]

[1]Laboratoire de Didactique André Revuz ; marie-jeanne.perrin@univ-paris-diderot.fr

Résumé : L'objectif de l'atelier est d'aborder la question de la progressivité des apprentissages géométriques du CM1 (et même avant) à la Sixième (et plus). Il s'agit de se pencher sur les continuités possibles entre une géométrie où les propriétés des figures se construisent et se vérifient avec des instruments, pratiquée en primaire, et la géométrie du collège où la validation des propriétés se fait par la démonstration et pour cela de réfléchir aux conditions qui permettent aux constructions instrumentées de contribuer à la conceptualisation des notions géométriques abstraites. En partant des objectifs d'apprentissage au cycle 3, nous discutons, à partir de quelques exemples, de moyens qui permettraient de les atteindre, notamment en agissant sur les variables didactiques dans des situations de restauration de figure. La réflexion essentielle porte sur l'usage des instruments pour lesquels nous dégageons un « usage géométrique ».

Mots clefs : géométrie ; usage des instruments de géométrie ; restauration de figures ; progressivité des apprentissages ; lien primaire-collège.

Quelques présupposés et repères théoriques

Nous commencerons par exprimer rapidement quelques présupposés et repères théoriques qui sont à la base de l'approche de la géométrie présentée ici, initiée par un groupe de recherche[1] de l'IUFM Nord - Pas-de-Calais qui a fonctionné de 2000 à 2010 et continue sous d'autres formes.

Pourquoi enseigner la géométrie des figures dans la scolarité obligatoire ?

Nous retenons au moins trois raisons d'enseigner à tous l'étude des figures géométriques. On peut les retrouver, éventuellement exprimées autrement, dans le rapport Kahane (2002) :

- le développement du raisonnement mathématique sur des problèmes qui ne sont pas facilement algorithmisables,

- la capacité à utiliser un cadre théorique cohérent pour modéliser et résoudre des problèmes concrets qui se posent dans l'espace sensible. C'est important dans la vie quotidienne et aussi pour certaines professions, et donc certaines branches des lycées professionnels.

- un moyen de représentation pour d'autres champs de savoir, y compris à l'intérieur des mathématiques. La pensée géométrique constitue en effet un puissant outil heuristique par le fait que l'on peut transférer dans ces champs des intuitions issues de notre rapport à l'espace, ce qu'on appelle parfois l'intuition géométrique. Ainsi l'appui sur les grandeurs géométriques (longueur, aire) et pas seulement sur leur mesure, est essentiel pour conceptualiser les nombres. Même pour traiter la géométrie par le calcul, l'appui sur les connaissances géométriques liées aux figures permet de rendre les calculs plus efficaces.

[1] Ont participé à ce groupe : Jean-Robert Delplace, Raymond Duval, Claire Gaudeul, Marc Godin, Bachir Keskessa, Régis Leclercq, Christine Mangiante, Anne-Cécile Mathé, Bernard Offre, Marie-Jeanne Perrin, Odile Verbaere.

Une même axiomatique pour fonder la géométrie sur toute la scolarité obligatoire

Un de nos postulats de départ est que la cohérence de l'enseignement de la géométrie élémentaire (de l'école au collège) ne peut être assurée sans une axiomatique sous-jacente dont devraient disposer au moins les enseignants du collège et du lycée. C'est nécessaire pour qu'ils se sentent légitimes et assurés de la validité de ce qu'ils enseignent. Le modèle théorique de la géométrie, quel qu'il soit, permet de rendre compte des problèmes qui se posent dans l'espace sensible parce que, quelle que soit la théorie, les axiomes n'ont pas été choisis n'importe comment. Cependant, l'axiomatique sous-jacente n'est pas indifférente si l'on veut penser la cohérence et la continuité de l'enseignement de la géométrie sur toute la scolarité obligatoire.

Evolution des significations

Les mêmes mots désignent des choses différentes à mesure qu'avance la scolarité. Au CP (et même avant) on introduit un premier vocabulaire géométrique en appui sur la perception pour décrire des formes géométriques et l'alignement d'objets. On introduit progressivement des instruments aux cycles 2 et 3 pour outiller la perception relative à des caractéristiques précises des figures. Au cycle 4, on a des objets théoriques définis dans le langage mais les mots demeurent alors que les objets désignés par ces mots changent : nom des figures usuelles, point, droite, segment, angle... Ce qui était l'objet même du travail et de la réflexion devient la représentation d'un objet abstrait sur lequel doit porter la réflexion.

Connaissances géométriques et connaissances spatiales

En référence aux travaux de Berthelot et Salin des années 90 (Berthelot et Salin, 1992, 2003 ; Salin, 2008, 2014), nous faisons l'hypothèse que le développement de connaissances spatiales appuyées sur la perception (déplacements dans l'espace, orientation, reconnaissance et description des objets de l'espace) est indispensable pour le développement des élèves et aussi pour l'enseignement de la géométrie mais aussi que les connaissances géométriques doivent être distinguées des connaissances spatiales et se construire à la fois en appui et contre les connaissances spatiales.

Deux finalités pour la géométrie

Brousseau (2000) reprend une distinction faite dès 1982, entre deux finalités de la géométrie représentées par deux situations :

- celle du charpentier qui découpe au sol des grandes pièces de bois qu'il devra assembler à dix mètres du sol.

- la situation des médiatrices : si on trace un triangle et ses trois médiatrices à l'équerre sans trop de soin, on obtient un petit triangle qu'on dit associé au premier. La situation consiste à chercher un triangle pour lequel le petit triangle associé soit le plus grand possible et à montrer que c'est impossible parce qu'avec les définitions et propriétés des médiatrices, le triangle est nécessairement réduit à un seul point.

La première situation correspond à la géométrie comme modèle de l'espace, ce que nous appellerons ici la finalité pratique de la géométrie. La seconde représente la géométrie comme théorie de l'espace, ce que nous appellerons la finalité théorique de la géométrie.

Une réinterprétation des cadres théoriques utilisés dans des travaux de recherche en France

Houdement et Kuzniak (2000), Houdement (2007) ont distingué trois paradigmes pour la géométrie. Dans ce texte, nous ne considérerons que les deux premiers que nous réinterprétons en termes de finalité :

G1 correspond à la finalité pratique : c'est résoudre des problèmes posés dans l'espace sensible. On peut considérer que G1 comprend une théorie qui consiste en un corpus de savoirs acquis par l'expérience, sur lesquels s'appuie le raisonnement mais dont les fondements ne sont pas questionnés et dont la validation se fait dans l'espace sensible à l'aide d'instruments.

G2 correspond à la finalité théorique : c'est une théorie de l'espace, un modèle de G1, défini à partir d'objets premiers, les points, les droites et les plans et de relations entre ces objets dont certaines sont posées comme axiomes et les autres démontrées (géométrie d'Euclide). Remarquons qu'il y a différents choix possibles pour les axiomes de G2, équivalents du point de vue mathématique mais non de la cohérence de l'enseignement.

Pour notre part, nous nous intéressons à une partie de G1 restreinte à l'espace graphique (ensemble des tracés à main levée ou avec des instruments sur un support plan, papier ou écran), que nous appellerons *Géométrie des tracés* et noterons G1*. C'est une restriction de G1 avec pour seuls instruments les instruments de tracé et de reports de grandeurs (longueurs et angles) à l'exclusion des instruments de mesure. Dans la suite, nous restreignons l'espace sensible à l'espace des tracés avec des instruments sur une feuille de papier même si G1* pourrait aussi comprendre des tracés sur un écran avec un logiciel.

De leur côté, Berthelot et Salin (1992, 2000) identifient trois problématiques en géométrie. Nous les rappelons en indiquant comment, selon nous, chacune se situe par rapport aux modèles ou paradigmes précédents :

Problématique pratique : Les rapports à l'espace sont contrôlés de manière empirique et contingente par les sens. Dans ce cas, nous considérons qu'il n'y a *pas de théorie géométrique.* La fin justifie les moyens.

Problématique de modélisation ou spatio-géométrique : problème posé dans l'espace sensible, traduit dans un modèle géométrique où se fait la résolution ; le résultat est retraduit dans l'espace sensible ; la validation dans l'espace sensible. *Le modèle géométrique peut être G1, G1* ou G2.*

Problématique géométrique : problème, traitement et validation se situent dans le cadre de la géométrie théorique, selon des règles établies. Les rapports à la figure sont régis par les définitions et les règles de fonctionnement des objets théoriques qu'elle représente. *On est dans G2.*

Nos questions et nos choix théoriques

Au cours de la scolarité obligatoire, il y a deux tournants majeurs à gérer dans le mode de définition des figures : au cours du cycle 2 et au début du cycle 3, il faut passer de la seule perception au contrôle des propriétés par des instruments. Au cycle 3 on passe progressivement du contrôle des propriétés par les instruments au contrôle par les énoncés. Au cycle 4, seul le contrôle par les énoncés sera valide. Les travaux sur la transition école-collège en géométrie ont mis en évidence une rupture qui tient au mode de validation des énoncés : par les instruments dans un cas, par la démonstration dans l'autre. Mais, pour la comprendre et chercher à la gérer, les recherches prennent rarement en compte toute la scolarité obligatoire. Nous pensons au contraire que, pour penser une continuité entre l'école et le collège, on ne peut pas se limiter à la seule transition école collège ni même au nouveau cycle 3, et qu'il faut le faire en considérant tout l'enseignement obligatoire et s'intéresser à la manière dont on utilise les instruments pour construire des figures en primaire et au début du collège. La question plus précise à laquelle nous voudrions réfléchir dans l'atelier est la suivante : La validation par les instruments de géométrie (règle, équerre, compas), valorisée en primaire, peut-elle jouer un rôle positif dans l'accès à la validation par la démonstration ?

Pour ce faire, il nous faut examiner d'un peu plus près l'usage des instruments de tracé dans les constructions et la vérification des propriétés et voir si l'on peut dégager dans G1* des règles d'usage des instruments qui aideraient les élèves à entrer dans une problématique géométrique.

Pour éclairer notre propos, prenons l'exemple de la construction d'un triangle rectangle connaissant l'hypoténuse en position et un côté de l'angle droit en grandeur (b). On peut se poser le problème dans le cadre théorique de la géométrie : conditions d'existence et unicité de la solution. On peut aussi le poser dans le cadre graphique du moyen effectif de construction avec les instruments dont on dispose. Dans ce deuxième cas, le problème dépend des instruments disponibles et de leur usage autorisé.

Supposons qu'on dispose d'une règle (non graduée), d'une équerre (non graduée mais sur laquelle on peut porter des repères) et d'un compas. On peut parfois observer une procédure pratique chez les élèves (Figure 1) : repérer la longueur b sur un côté de l'angle droit de l'équerre, placer l'équerre de façon à maintenir le repère sur une extrémité de l'hypoténuse donnée et ajuster la position du sommet et de l'autre côté de l'angle droit en faisant tourner l'équerre jusqu'à ce que le deuxième côté de l'angle droit passe par l'autre extrémité de l'hypoténuse.

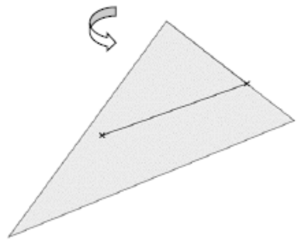

Figure 1

Cette procédure n'utilise que des connaissances spatiales. Ce n'est pas une procédure de G1*. Dans G1*, il n'y a pas d'ajustement des instruments. L'équerre ne trace que des angles droits à un endroit donné. Il faut avoir une droite sur laquelle poser un côté de l'angle droit. Avec cette condition, la seule manière d'utiliser l'équerre serait de construire ailleurs le triangle rectangle à partir du côté de l'angle droit dont on connait la longueur puis de construire sur l'hypoténuse un triangle connaissant les longueurs des trois côtés.

A partir d'un côté de l'angle droit, on peut tracer avec l'équerre le support du deuxième côté de l'angle droit mais on ne connaît pas sa longueur. Pour trouver le sommet manquant, il faut utiliser la longueur de l'hypoténuse. Une procédure pratique souvent observée consiste à prendre un repère sur la règle puis à la faire tourner de manière à amener ce repère sur la droite support du côté cherché.

Là encore, il s'agit d'une procédure qui utilise des connaissances spatiales et que nous ne retenons pas dans G1*.

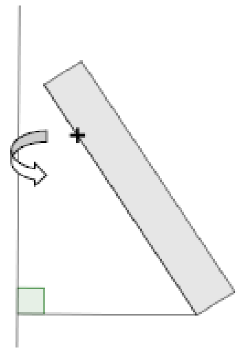

Figure 2

Dans G1*, on ne peut reporter une longueur que sur une droite déjà tracée à partir d'un point déjà marqué sur cette droite. Pour faire tourner une longueur, il faut un compas. Pour construire un triangle rectangle dont un côté de l'angle droit est donné en position et l'hypoténuse donnée en grandeur, il faut donc prendre l'intersection d'une droite (la perpendiculaire au segment en l'une de ses extrémités, construite à l'équerre) et d'un cercle dont on connaît le centre et le rayon. Dans le cas où c'est l'hypoténuse qui est donnée en position, il faut prendre l'intersection de deux cercles. Pour cela, il faut savoir que le triangle rectangle est inscrit dans un cercle de diamètre son hypoténuse et avoir un moyen de prendre le milieu d'un segment. On peut déduire que le triangle rectangle est inscrit dans un cercle si on sait que le triangle rectangle est un demi-rectangle et qu'un rectangle est inscrit dans un cercle dont le centre est le point d'intersection des diagonales du rectangle (figure souvent reproduite au cycle 3 et qui pourrait servir de référence).

Ainsi, la phase d'analyse et recherche de conditions nécessaires (sur quelles lignes se trouve le sommet manquant) dépend des connaissances disponibles mais elle est de même nature, que le problème soit théorique ou graphique (dans G1*). Les différences principales résident dans la discussion à mener et dans la vérification que les conditions sont suffisantes. Dans le problème théorique, il faut exhiber et justifier les conditions auxquelles les deux lignes se coupent et non dans le problème graphique où l'expérience graphique suffit à décider ou non de l'existence des points d'intersection. La validation du fait que les conditions sont suffisantes se fait par la démonstration dans un cas, par la vérification avec les instruments dans l'autre. Par exemple, si l'on a obtenu le sommet de l'angle droit du triangle sans utiliser l'équerre, par intersection de deux cercles, on vérifiera avec l'équerre que l'angle obtenu est bien droit alors qu'un théorème sera utilisé si le problème relève de la géométrie théorique. La question de la précision des instruments se pose dans G1*. Ainsi, on ne peut pas décider de l'existence d'un triangle dont les longueurs des côtés données par des segments sont telles que la plus grande est très proche de la mise bout à bout des deux autres. En revanche, si on a obtenu la troisième longueur en mettant bout à bout les deux premières, on sait qu'on ne peut pas faire un triangle avec ces trois longueurs.

Evolution des modes de reconnaissance et de production de figures simples ou composées au cycle 2 et au cycle 3

Un exemple : reproduction d'un polygone. Différentes visions des figures

Les moyens de reconnaissance et de production d'une figure simple (contour d'un gabarit) évoluent radicalement du CP à la 6ème. Nous allons l'illustrer par l'exemple de la reproduction d'un polygone dont on a un modèle sur un calque qui servira à la vérification.

En début de CP, on peut reproduire le polygone avec un gabarit dont on fait le tour (Figure 3).

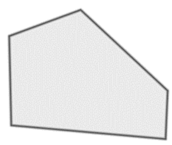

Figure 3

Si le gabarit a un coin coupé (Figure 4), il faut restaurer le sommet qui manque en prolongeant avec une règle les côtés restants. Les enfants de CP ou CE1 résistent à ce prolongement, ils essaient de ne pas dépasser.

Figure 4

Il faut reporter une longueur si on ne veut pas dépasser (Figure 5).

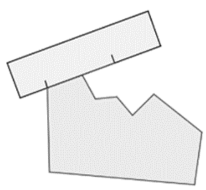

Figure 5

S'il manque tout un côté, on est obligé de reporter deux longueurs (Figure 6) ou bien une longueur et un angle.

S'il manque deux côtés (Figure 7), il est nécessaire de reporter au moins un angle ou de reconstruire un triangle sur une diagonale du polygone.

Un triangle peut se construire avec une équerre en reportant trois longueurs (Figures 8 et 9).

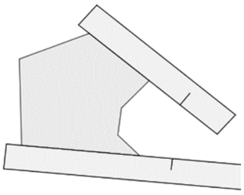

Figure 6

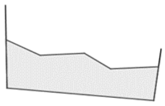

Figure 7

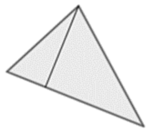

Figure 8

Figure 9

Les premiers moyens de reproduction (Figures 3 à 5) reposent sur une vision du polygone comme une surface avec un bord. La reproduction de la figure 6 relève aussi de cette vision mais elle demande de voir que le dernier côté qui ferme le contour et qui n'est pas du tout amorcé par le gabarit, peut être obtenu en joignant les extrémités des côtés qu'on peut construire par un prolongement et un report de longueur.

La reproduction des triangles est importante puisque, quand on sait reproduire un triangle, on sait reproduire n'importe quel polygone en le décomposant en triangles, ce qui demande de voir le polygone autrement que comme un simple contour de gabarit et de concevoir des lignes qui n'étaient pas tracées et qui peuvent se définir (en tant que tracés) à partir d'éléments déjà tracés. Cela relève de ce que nous appelons une vision lignes de la figure.

De même, la reproduction du triangle à la règle et à l'équerre nécessite de considérer une ligne (la hauteur) qui ne fait pas partie du bord de la figure. Cela relève d'une vision lignes de la figure.

En revanche, pour comprendre et justifier la reproduction d'un triangle au compas à partir des longueurs des côtés, il faut voir un point comme intersection de lignes (deux cercles) qui ne déduisent pas des tracés existants et ne font pas partie du bord de la figure et voir le cercle comme l'ensemble des points à une distance donnée du centre. Cela relève de ce que nous appelons une vision points de la figure.

Des instruments variés et leurs liens avec les concepts géométriques

Nous faisons l'hypothèse que les instruments de tracé, règle, équerre, compas, peuvent jouer un rôle essentiel dans le passage du contrôle des figures par la seule perception au contrôle par les énoncés à condition d'identifier leur fonction dans la représentation de propriétés géométriques. Or les instruments matériels usuels remplissent plusieurs fonctions, d'où l'utilité de s'intéresser à des instruments théoriques définis par une seule fonction liée à la conceptualisation d'une notion géométrique précise et non limités : par exemple la règle est aussi longue qu'on veut.

Nous distinguons donc la *règle* qui ne sert qu'à tracer des traits droits, le *reporteur de longueur* (par exemple une bande de papier fort avec un bord droit sur lequel on peut écrire), le *médiateur de segment* (par exemple une bande de papier avec un bord droit qu'on peut plier), l'*équerre* qui ne permet que de reporter des angles droits, le *reporteur d'angle*, le *compas* comme traceur de cercles. Les instruments considérés sont liés à la représentation graphique des objets géométriques ou grandeurs géométriques droite, longueur, milieu d'un segment, angle, angle droit, cercle.

La règle, le reporteur de longueur, le médiateur de segment ne permettent de reporter en une fois que de l'information de dimension 1 (D1) sur les figures ; l'équerre et le reporteur d'angles permettent de reporter des surfaces, c'est-à-dire de l'information de dimension 2 (D2). Le cas du compas est plus complexe : il permet de reporter de l'information D2 à condition d'avoir des connaissances qui dépassent la vision naturelle des figures : reproduire avec un compas un cercle donné dont le centre n'est pas marqué nécessite beaucoup de connaissances géométriques. D'autres instruments permettent de reporter de l'information D2 tout en ne disposant que de la vision surfaces des figures : les gabarits et pochoirs permettent de reporter toute l'information sur une figure simple ; le papier calque le permet sur une figure simple ou composée ; un gabarit ou un pochoir déchiré permet de reporter une partie de l'information D2 sur une figure simple.

Restauration de figures

Pour travailler avec les élèves le changement de regard sur les figures ainsi que le lien entre l'usage des instruments et les concepts géométriques, nous avons mis au point un type de situation que nous avons appelé la restauration de figure. Une restauration de figure est une reproduction de figure matérielle mais avec des contraintes particulières :

- Une figure modèle est donnée (en vraie grandeur ou non).
- Une partie de la figure à obtenir (amorce) est donnée soit par son tracé, soit par un instrument qui permet de reporter des informations D2 de la figure initiale mais sans donner toute l'information.
- On dispose d'instruments variés qui ont un coût d'utilisation donné dans un barème.
- Quand les élèves pensent avoir terminé, ils peuvent tester leur production par un calque disponible auprès du maître.

En termes de théorie des situations, le milieu est constitué notamment de la figure modèle, de l'amorce de la figure, des instruments avec leur coût. Les variables (didactiques) portent sur les choix de ces différents éléments du milieu. Les connaissances en jeu sont à examiner dans chaque cas. Il faut choisir le milieu et la règle du jeu en fonction des connaissances supposées disponibles et de celles dont on veut favoriser l'émergence.

Analyse de quelques exemples

Lors de l'atelier, nous avons proposé six exemples différents aux participants. Faute de place, nous n'en reprenons ici que deux, les situations 2 et 4. Les situations 1 et 3 font partie d'une ressource pour les enseignants du cycle 3 en cours de production dans le cadre du LéA Valenciennes-Denain ; la situation 1 est présentée dans plusieurs publications, notamment Mangiante-Orsola et Perrin-Glorian (2013, 2017). La situation 5 est décrite dans Perrin-Glorian et Godin (à paraître). La situation 6 est succinctement présentée dans une version différente dans Perrin-Glorian (2012).

Situation 2

Le travail proposé aux participants était le suivant :
- Reproduire une des figures suivantes (Figures 10, 11, 12) à partir de l'amorce donnée (Figure 13).
- Discuter le choix des instruments disponibles et du barème.
- Prévoir une séance au CM ou en 6ème.

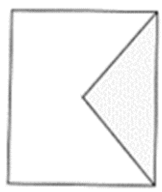

Figure 10

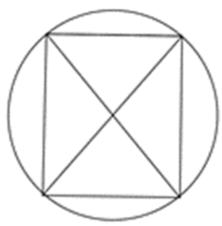

Figure 11

Dans tous les cas, il faut reconnaître la position de l'amorce sur la figure modèle (ici légèrement grisée). Celle-ci est à une échelle différente, ce qui interdit les reports du modèle sur la figure à produire. Les figures 12 et 10 sont des sous-figures de la figure 11. Celle-ci contient toutes les lignes nécessaires à sa reproduction, ce qui n'est pas le cas de la figure 10. La figure 12 contient aussi toutes les lignes nécessaires à sa reproduction avec un report de longueur mais la présence du cercle dans la figure 11 aide à voir qu'un seul usage du compas pour tracer le cercle et des prolongements à la règle suffisent pour obtenir les sommets manquants du rectangle.

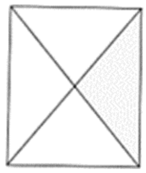

Figure 12

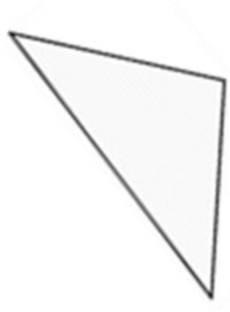

Figure 13

On pourra favoriser cette procédure dans le cas des figures 10 et 11 en choisissant un barème où le compas est bon marché et le report de longueur cher. Si on laisse l'équerre à disposition, les élèves peuvent vouloir commencer par reproduire le rectangle ; ils sont néanmoins obligés de reconnaître les côtés égaux du triangle isocèle amorce comme des demi-diagonales et de les prolonger pour trouver les sommets manquants du rectangle puisqu'ils ne disposent pas de sa largeur. Ce prolongement est plus difficile à mobiliser dans le cas de la figure 10 puisque les diagonales ne figurent pas en entier sur le modèle. Si l'on veut seulement mobiliser le fait que les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu, on peut choisir la figure 12 et laisser à disposition le reporteur de longueur. La procédure de report de longueur serait valable aussi dans le cas d'un parallélogramme avec pour amorce un triangle quelconque (on obtiendra un rectangle dans le cas du triangle isocèle). Si l'on veut que les élèves mobilisent le compas pour tracer le cercle circonscrit avant de prolonger, il est souhaitable qu'ils aient rencontré la figure 11 avant qu'on leur propose la figure 10. On peut proposer la figure 11 en CM2 ; en $6^{\text{ème}}$, on peut proposer la figure 11 si les élèves ne l'ont jamais rencontrée et, quelque temps plus tard la figure 10, en donnant par exemple comme barème : règle gratuite ; compas 5 points pour chaque trait (un cercle ou un arc) ; équerre 5 points ; reporteur de longueur (autre que le compas) 10 points.

Situation 4

Nous avons proposé aux participants de comparer les problèmes suivants :

<u>Problème 1</u> : Soit un rectangle ABCD. Construire un losange ECFA tel que E soit sur le segment [CD] et F sur le segment [AB].

<u>Problème 2</u> :

Reproduire la figure suivante. On a déjà tracé le rectangle.
Coût des instruments :
Règle : gratuit
Equerre : 2 points
Report de longueur : 10 points
Report d'angle : 10 points
Médiateur de segment : 20 points

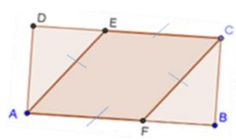

Figure 14

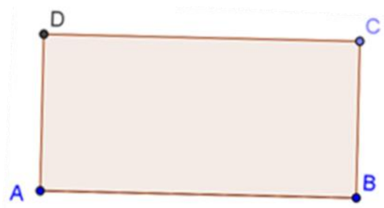

Figure 15

La figure à restaurer dans le problème 2 est la figure d'analyse du problème de construction (problème 1). On peut lire sur la figure 14 que les sommets A et C sont communs au losange et au rectangle. Ceux-ci ont donc la diagonale [AC] en commun. Dans le problème 1, il faut le déduire du texte et en particulier du nom donné aux deux quadrilatères. Le barème choisi dans le problème 2 favorise la construction par les diagonales (E et F sur la médiatrice de [AC] ou (EF) perpendiculaire à [AC] en son milieu suivant les connaissances des élèves). Pour trouver le milieu de [AC], il faut se servir du fait que les diagonales du rectangle se coupent en leur milieu. D'autres constructions sont possibles à partir du report d'angles ; le report de longueur ne peut servir qu'à reporter des angles (par exemple reporter sur l'amorce le triangle CBF à la taille du modèle puis prolonger la direction de [CF]) puisque amorce et modèle ont des tailles différentes. Nous proposons l'équerre plutôt que le compas parce que c'est la perpendicularité des diagonales que nous voulons faire utiliser par les élèves.

Le problème 1 est extrait d'un mémoire de PLC2 réalisé à Lille à la fin des années 90. Il avait été proposé à des élèves de 6ème et 5ème ; la plupart d'entre eux ont eu du mal à se départir d'une figure où le losange s'inscrit dans le rectangle avec comme axes de symétrie les médianes du rectangle. La restauration de figure du problème 2 évite cet écueil.

Conclusion

En conclusion, nous voudrions revenir sur le rôle que peut jouer la validation par les instruments de géométrie dans l'accès à la validation par la démonstration. Nous pensons que ce rôle peut être positif si la validation par les instruments est liée au contrôle de propriétés géométriques (relations entre éléments constitutifs de la figure) et non seulement de caractéristiques graphiques. Cela nous semble favorisé par l'explicitation de ce que nous appelons un *usage géométrique des instruments* que nous précisons maintenant :

Pour placer la règle, il faut deux points ou un segment déjà tracé.
Le report d'une longueur se fait à partir d'un point sur une droite qu'on connaît déjà.
Pour obtenir le milieu d'un segment, on reporte un segment de même longueur sur une bande de papier avec un bord droit qu'on plie en faisant coïncider les deux extrémités ; on reporte la longueur moitié obtenue sur le segment, vers l'intérieur, à partir d'une des extrémités.
Pour poser l'équerre, il faut une droite sur laquelle on pose un côté de l'angle droit, on peut la faire glisser sur cette droite si l'on veut que l'autre côté de l'angle droit passe par un point donné.
Le compas a deux branches différentes : la pointe se pose sur le centre du cercle, la mine décrit un arc de cercle quand on tourne. *Pour reporter un cercle*, il faut repérer le centre et prendre l'écartement jusqu'à un point du bord.
On reporte un angle à partir d'une demi-droite qu'on a déjà : on reporte le sommet sur le point origine de la demi-droite et un côté sur la demi-droite qu'on a déjà et on reporte l'autre côté de part ou d'autre de cette demi-droite.

Nous faisons l'hypothèse que le fait de s'intéresser à la manière de poser les instruments et en particulier aux éléments qui doivent être déjà présents sur la figure pour le faire amène à s'intéresser aux relations entre ces traces graphiques et prépare la considération des relations entre les objets géométriques qu'elles représentent.

Références

Berthelot, R., Salin, M.H. (1992). *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse. Université de Bordeaux 1.

Berthelot, R., Salin M.-H. (2000). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N*, 65, 37-59.

Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Duval, R., Godin M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N,* 76, 7-27.

Houdement, C. (2007). A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères-IREM*, 67, 69-84

Houdement, C., Kuzniak, A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 20(1), 89-115.

Kahane, J.P. (dir.) (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques : Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Odile Jacob : Paris.

Mangiante-Orsola C., Perrin-Glorian M.J. (2014). Géométrie en primaire : des repères pour une progression et pour la formation des maîtres. *Grand N,* 94, 47-79.

Mangiante-Orsola C., Perrin-Glorian M.J. (2017) Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du LéA Valenciennes-Denain. *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Année 2016*.

Perrin-Glorian, M.J. (2012). Vers une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie plane du CP à la fin du collège ? L'exemple de la symétrie axiale. *Bulletin de l'APMEP,* 499, 325-332. Disponible en ligne dans une version plus complète sur le site de l'APMEP : http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Perrin_Glorian_2.pdf

Perrin-Glorian, M.J., Godin, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école,* 222, 26-36.

Perrin-Glorian, M.J., Godin, M. (à paraître) Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège. In *Concertum* CORFEM.

Salin, M.H. (2008). Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège. Le facteur temps. *Bulletin de l'APMEP,* 478, 647-670.

Salin, M.H. (2014). Quelques remarques autour des finalités de l'enseignement de la géométrie à l'école primaire. *Actes du XLème colloque de la COPIRELEM, Nantes 2013,* 33-43.