

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

### Continuités et ruptures de l'enseignement des fractions au cycle 3

L. Coulange  
 G. Train  
 Lab-E3D - Université de Bordeaux

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

### Point de vue institutionnel

- La fraction **partage de l'unité** au début du cycle 3

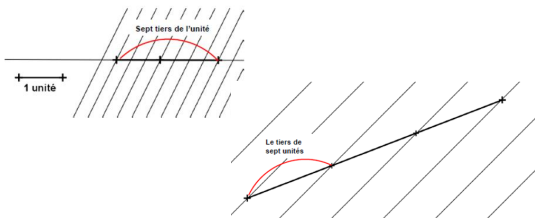
Lorsqu'on partage (coupe) une unité en un nombre entier de parts égales et qu'on prend un nombre entier de ces parts, éventuellement supérieur au nombre de parts contenues dans cette unité, on obtient une fraction (de l'unité)

- La fraction **quotient** en dernière année de cycle 3

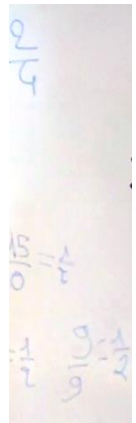
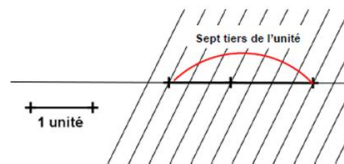
En dernière année de cycle 3, la fraction  $\frac{a}{b}$  (où  $a$  est un nombre entier et  $b$  est un nombre entier non nul) est définie comme le nombre qui multiplié par  $b$  donne  $a$ ; il s'agit du quotient de  $a$  par  $b$

### Deux points de vue...

- sept tiers de l'unité versus le tiers de sept unités
- Un « bon » outil : le guide-âne

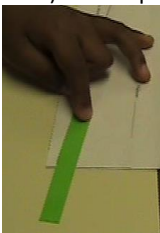


### La fraction « partage »



### La fraction « partage de l'unité » ?

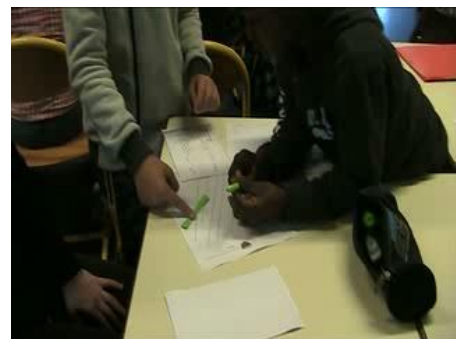
- Le rôle de routines quotidiennes et mathématiques sur la « moitié » (ou le demi ?) et le « quart » ?



La moitié (et le quart) de l'unité  
 Rôle du pliage ?  
 Parts « égales », oui mais...

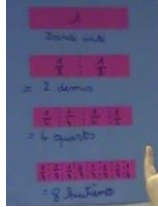
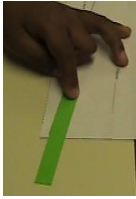


Extrait vidéo – Laëtitia (négociation du pliage)



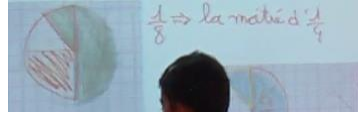
## La fraction « partage de l'unité » ?

- Action de partage (en 2, en 2 de 2, en 2 de 2 de 2...) et résultat de l'action de partage (2 demis, 4 ou 2 quarts, 8 ou 4 ou 2 huitièmes ...)



## La fraction « partage de l'unité » ?

- On partage *en deux* l'unité mais déjà aussi des partages *de subdivisions de l'unité* comme  $\frac{1}{2}$  pour construire  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{4}$  pour construire  $\frac{1}{8}$ ,  $\frac{1}{3}$  pour construire  $\frac{1}{6}$  ...



## La fraction « partage »

- Des routines sur la « moitié » (ou le demi ?) et le « quart » à **exploiter et/ou à dépasser** ?
- Tensions entre actions et résultats de l'action**
- Partage de l'unité et **de subdivisions de l'unité (« en deux » ?)**

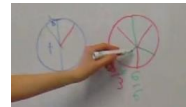
## Potentialités de la fraction « partage »

- Equivalences d'écritures

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4}$$

- Des raisonnements que l'on peut formuler

« alors vous me dites un tiers reste un huitième d'accord (...) non...  
la vous êtes tous d'accord c'est des tiers M écrit 1/3 sous le disque on a trois tiers M rectifie 3/3 ensuite qu'est-ce que tu fais ? Ed trace une ligne séparant chaque tiers en deux avec un feutre vert tu obtiens quoi ? »



Extrait vidéo – Agnès (fin de séance sur la production d'écritures variées de  $\frac{1}{2}$ )

## Potentialités de la fraction « partage »

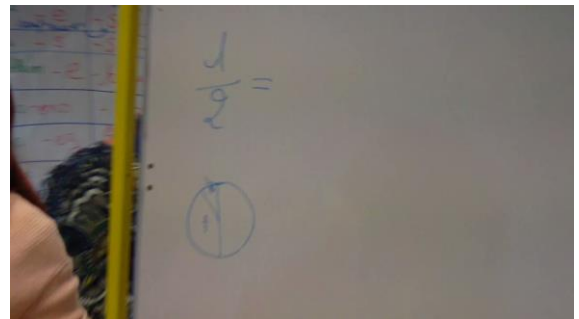
- Equivalences d'écritures

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{4} + \frac{2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{9}{18} = \frac{15}{30} = \dots$$

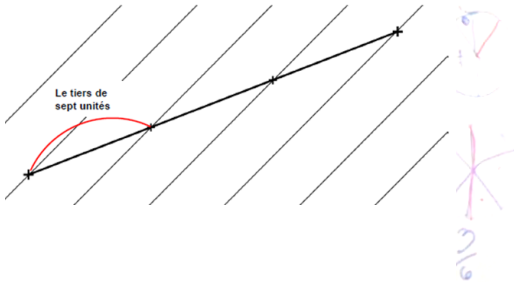
- Des raisonnements que l'on peut formuler

« donc si je partage en quatorze et que je prends sept parts tu es d'accord Ki [M le fait s'asseoir] ou pas est-ce que sept quatorzième ça fait bien un demi si je partage en quatorze et que je prends sept parts est-ce que j'ai bien la moitié »

Extrait vidéo – Agnès (fin de séance sur la production d'écritures variées de  $\frac{1}{2}$ )



## La fraction « quotient »



## Potentialités de la fraction « quotient »

- Un nouveau point de vue sur les décimaux  
Un nombre qui multiplié par 10, 100 ... donne un *entier*  
Le **produit de deux décimaux est égal au nombre qui multiplié par 10, 100 (par le produit de 10 et 10, 10 et 100 etc.) ... donne le produit de deux entiers**

- De la fraction quotient à ...  
*Partager 4 en -3 ?*  
**le nombre qui multiplié par -3 donne 4**  
*Qui est égale au nombre qui multiplié par 3 donne -4*

## Difficultés d'enseignement de la fraction « quotient » ?

### Des tentatives délicates...

- 3 Dans la salle d'arts plastiques, quatre feuilles identiques sont collées les unes aux autres. Trois élèves, Mathieu, Hanane et Natacha, sont chargés de les colorier très minutieusement en bleu. Ils doivent se répartir équitablement le travail. Pour cela, Natacha décide d'effectuer des plisages. Elle dit à ses camarades :
- « Je n'ai pas de règle pour mesurer, mais en deux plis seulement, je vais déterminer la partie que chacun devra colorier. De plus, la surface attribuée à chacun sera d'un seul morceau. »
1. Comment va-t-elle procéder ? Reproduire le modèle ci-dessous sur du papier non quadrillé et le plier pour expliquer la méthode de Natacha.
  2. Quelle fraction permet de représenter ce partage équitable des quatre feuilles ?
  3. Une fois le travail terminé, le professeur félicite les trois élèves : « C'est très bien, j'ai vu que chacun a colorié la même surface, vous étiez trois et les quatre feuilles sont finalement uniformément bleues. » La phrase du professeur se traduit par  $3 \times \dots = \dots$



(Extrait du manuel *Mission Indigo 4<sup>e</sup>*, ed. Hachette, p. 51)

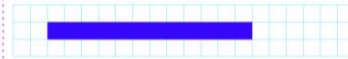
## Difficultés d'enseignement de la fraction « quotient »

### Des tentatives délicates...

- 1 Dans la figure ci-dessous, le rectangle rouge représente le rectangle unité. Le rectangle vert représente les  $\frac{2}{3}$  du rectangle unité.



- 2 Dans un quadrillage, reproduis le rectangle violet ci-dessous.



Combien de rectangles unités représente-t-il ?

- 3 Partage ce rectangle en trois rectangles identiques. Que dire des rectangles obtenus ?
- 4 Recopie puis complète alors l'égalité :  $4 \div 3 = \dots$

(Extrait du manuel *Mission Sésamaths 4<sup>e</sup>*)

## Difficultés d'enseignement de la fraction « quotient »

- Des tentatives délicates voire absentes  
«  $\frac{4}{3}$  c'est 4 divisé par 3 »
- Et peu d'occasions d'utilisation par la suite...

## Grandeurs, partage et quotient

- Une dichotomie à revoir entre fraction partage et fraction « quotient » ?

Le tiers de 7 unités c'est bien partager en 3 « 7 unités » comme on a partagé une unité en 3 (mais aussi  $\frac{1}{3}$  d'unité en 2, etc.)...

**L'opérateur partage d'une grandeur**

## Grandeurs, partage et quotient

- Une dichotomie à revoir entre fraction partage et fraction « quotient » ?

Le tiers de 7 unités c'est bien partager en 3 « 7 unités » comme on a partagé une unité en 3 (mais aussi  $1/3$  d'unité en 2, etc.)...

### L'opérateur partage d'une grandeur

## Grandeur et opérateur

$$a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c} = \frac{a}{c} \times b \quad \text{ou} \quad 3 \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{7} = \frac{3}{7} \times 2$$

Considérons 3 fois le septième de 2 unités– c'est égal au septième de 3 fois 2 unités ...

**Mais deux fois le septième de 3 unités ?**

## Grandeur et opérateur

$$\bullet \quad a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c} = \frac{a}{c} \times b \quad \text{ou} \quad 3 \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{7} =$$

*Certes 2 fois le septième de 3 unités est bien égal à ... mais ce 3 était jusqu'ici un opérateur et devient une grandeur...*

**Des changements de statuts  
de grandeur à opérateur ?**

## Grandeur et opérateur

$$\frac{a}{x} = b \text{ et } x = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{12}{x} = 7 \text{ et } x = \frac{12}{7}$$

Le x-ième de 12 unités donne 7 unités

12 x-ième de unités donne 7 unités

????

## Grandeur et opérateur ?

$$\frac{a}{x} = b \text{ et } x = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{12}{x} = 7 \text{ et } x = \frac{12}{7}$$

$\frac{12}{x}$  est le nombre de fois x unités qui donne 12 unités, soit 7 fois, alors 12 unités partagé en 7 donne x unités.

Mais alors  $\frac{12}{x}$  doit être considéré comme le quotient de 12 unités par x unités...

## Grandeur et commensuration

« La fraction  $n/m$  est la mesure d'un objet tel qu'il faut en « sommer » m, égaux, pour équivaloir à n unités »

(Brousseau & Brousseau 1987)

Une définition proche du « nombre qui multiplié par ... donne... » dans le cadre des grandeurs

CRDM « Guy Brousseau »

Grandeur et commensuration

IMAC

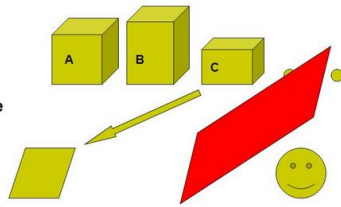
INSTITUTO DE MATEMATICAS Y APLICACIONES DE CASTELLON

UNIVERSITAT JAUME I



« Centre de ressources en Didactique des Mathématiques » de l'institut de mathématiques et applications de Castellón, Université Jaume I

Jeanne



Jeanne doit exprimer l'épaisseur de la feuille C (sans lettres) et l'écrire sur le message bleu

Grandeur et commensuration

Judi 16 dicembre 1996  
 L'epaisseur d'une feuille

J'ecris 3 couples equivalents aux couples suivants :

8 f; 6 mm  $\equiv$  16 f; 12 mm  $\equiv$  4 f; 3 mm  $\equiv$  24 f; 18 mm

50 f; 4 mm  $\equiv$  25 f; 2 mm  $\equiv$  100 f; 8 mm  $\equiv$  250 f; 20 mm

100 f; 12 mm  $\equiv$  50 f; 6 mm  $\equiv$  20 f; 3 mm  $\equiv$  200 f; 24 mm.

Grandeur et commensuration

Range les épaisseurs suivantes de la plus petite à la plus grande :

$\frac{35}{100}$ ,  $\frac{3}{5}$ ,  $\frac{62}{97}$ ,  $\frac{5}{25}$

5	25	=	125
5	97	=	485
100	20	=	2000
100	24	=	2400
5	3	=	25
10	8	=	20
2	3	=	24
2	24	=	24

Mais la somme des épaisseurs suivantes :

$\frac{15}{100} + \frac{22}{100} + \frac{62}{100} = \frac{99}{100}$

$\frac{4}{25} + \frac{11}{50} + \frac{15}{100} = \frac{8 + 22 + 15}{100} = \frac{45}{100}$

$\frac{3}{12} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} = \frac{7}{6}$

$\frac{5}{8} + \frac{13}{88} = \frac{55}{88} + \frac{13}{88} = \frac{68}{88} = \frac{17}{22}$

Grandeur et commensuration

- Pour faire un carton, on colle 5 feuilles identiques dont l'épaisseur est  $\frac{3}{25}$  mm.
  - Quelle sera l'épaisseur du carton ?
  - Le carton est-il plus gros ou plus fin qu'un millimètre ?
  - Combien de feuilles faut-il coller (au minimum) pour qu'il soit plus gros qu'un millimètre ?
- Un carton a une épaisseur de  $\frac{7}{25}$  mm. Il a été réalisé en collant 8 feuilles identiques. Quelle est l'épaisseur d'une de ces feuilles ?

Grandeur et commensuration

3)  $\frac{3}{25} \times 5 = \frac{15}{25}$

L'épaisseur du carton fait  $\frac{15}{25}$

Il est plus gros qu'un millimètre

Il faut coller 5 feuilles

$\frac{7}{25} : 8 = \frac{7}{200}$

$\frac{68}{200} : 8 = \frac{7}{200}$

L'épaisseur d'une feuille fait  $\frac{7}{200}$

## Grandeur et commensuration

$$\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{20}{24} + \frac{9}{24} = \frac{29}{24}$$

$$\frac{1}{9} : 8 = \frac{1}{72}$$

$$\frac{16}{36} : 8 = \frac{2}{9}$$

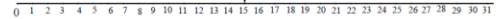
## Grandeur et commensuration

Une autre situation : celle des « automates »  
(Neyret 1995, reprise par Pressiat et bien d'autres...)

<http://eduscol.education.fr/cid47905/fiches-d-activite.html>

### Problème 1

Un automate arrive à la graduation 15 en effectuant 9 sauts.



Trouver tous les entiers avant 31 par lesquels passe l'automate.

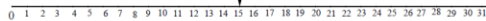
## Grandeur et commensuration

Une autre situation : celle des « automates »  
(Neyret 1995, reprise par Pressiat et bien d'autres...)

<http://eduscol.education.fr/cid47905/fiches-d-activite.html>

### Problème 1

Un automate arrive à la graduation 15 en effectuant 9 sauts.



Trouver tous les entiers avant 31 par lesquels passe l'automate.

## Quelques mots de l'histoire « des automates »...

- Une situation à l'origine pour la formation initiale des PE
- Une volonté explicite de transposer la situation de l'épaisseur des « feuilles de papier »...

## Un questionnaire nouveau sur « les automates »

Rôle du guide-âne (instrument de partage)

$13/14 = 16/17$  « après les automates »...

On prend une unité. On la partage 10 fois pour un segment. On la partage 16 fois pour un autre segment. Mais on prend le segment de 16 unités et on le partage 14 parties égales. Puis on prend le segment de 10 unités et on le partage en 14 parties égales. Ensuite on compare.

## Un questionnaire nouveau sur « les automates »

Rôle du guide-âne (instrument de partage) ?

Etude de techniques spécifiques de la commensuration pour comparer – sommer, etc. ?

Situation de communication ?



## Bibliographie

- Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire, G. Brousseau & N. Brousseau, IREM de Bordeaux, pp. 535, 1987, Jean Colmez
- Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les instituts universitaires de formation des maîtres, R. Neyret, Thèse de doctorat, 1995.
- CRDM Guy Brousseau  
<http://www.imac.uji.es/CRDM/>