

TROIS APPRÉHENSIONS DU PARALLÉLISME : UN EXEMPLE DE SÉQUENCE POUR LE CYCLE 3

9 juin 2017

Carine REYDY

ESPE d'Aquitaine, université de Bordeaux

Carine.Reydy@u-bordeaux.fr

Préambule

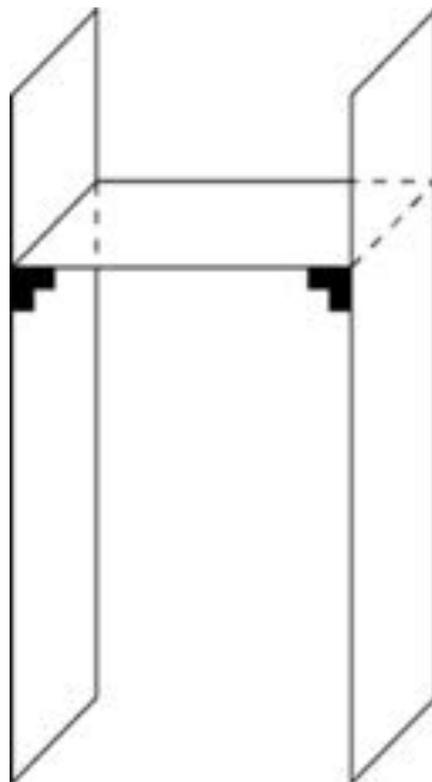
On a retrouvé une vieille étagère que l'on souhaite assembler, mais on a égaré la notice de montage.

On dispose de toutes sortes d'éléments de fixation : équerres, vis, chevilles, croisillons...

Comment faire pour que les deux montants soient parallèles ?

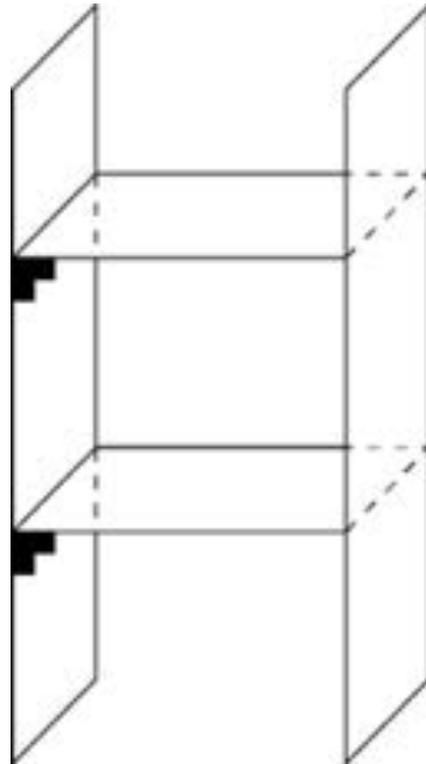


On fixe une étagère aux deux montants avec une équerre à chaque extrémité :



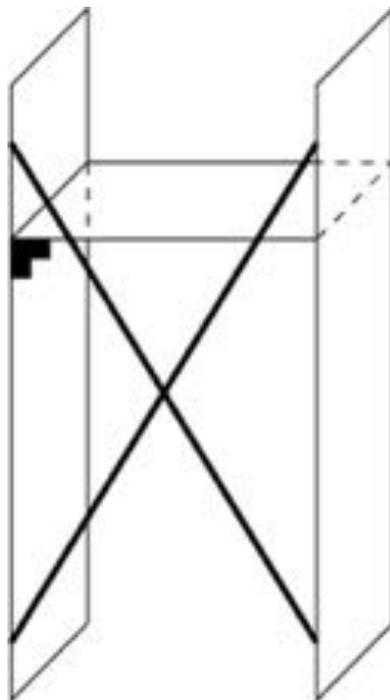
→ deux droites parallèles sont deux droites perpendiculaires à une même troisième.

On fixe deux étagères à l'un des montants avec des équerres, puis on fixe l'autre montant avec des vis :



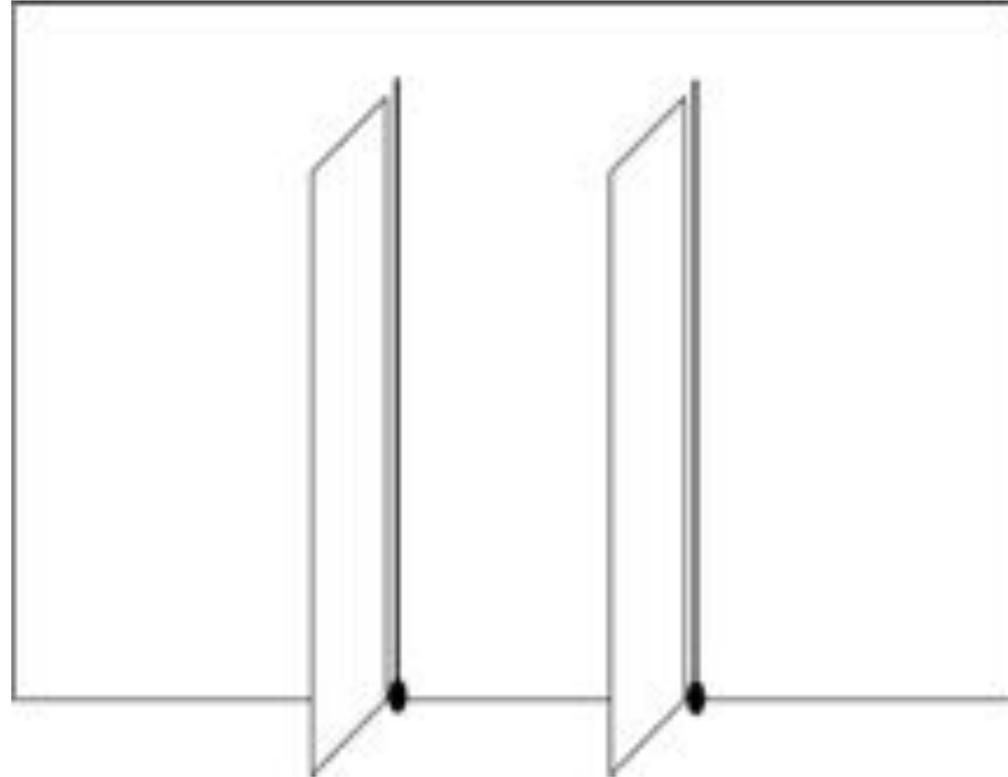
→ deux droites parallèles sont deux droites ayant un écartement constant.

On fixe une étagère aux deux montants avec une équerre pour régler l'écartement et on met un croisillon pour assurer le parallélisme.



→ deux droites parallèles sont deux droites portées par les côtés opposés d'un rectangle (diagonales de même longueur et sécantes en leur milieu).

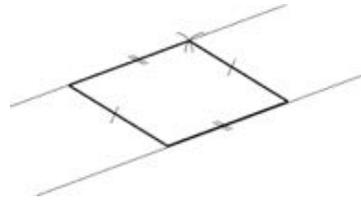
On fixe les deux montants au mur avec un fil à plomb :



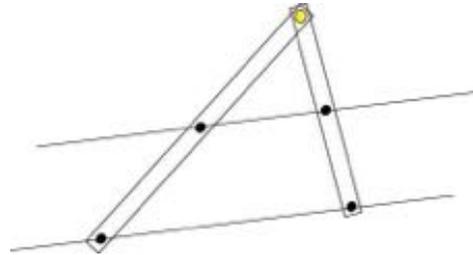
→ deux droites parallèles sont deux droites ayant la même direction.

Ici, on a mobilisé différentes caractérisations de deux droites parallèles. Il y en a bien sûr d'autres. Deux droites parallèles sont également :

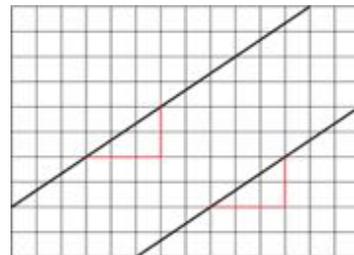
- deux droites portées par les côtés opposés d'un parallélogramme, d'un rectangle, d'un carré, d'un trapèze, d'un losange :



- deux droites passant par les milieux de deux côtés d'un triangle :



- deux droites ayant la même pente dans un réseau quadrillé :



La géométrie dans les programmes

À l'articulation de l'école primaire et du collège, le cycle 3 constitue une étape importante dans l'approche des concepts géométriques. Prolongeant le travail amorcé au cycle 2, les activités permettent aux élèves de passer progressivement d'une géométrie où les objets (le carré, la droite, le cube, etc.) et leurs propriétés sont contrôlés par la **perception** à une géométrie où ils le sont par le **recours à des instruments**, par **l'explicitation de propriétés** pour aller ensuite vers une géométrie dont la validation ne s'appuie que sur **le raisonnement et l'argumentation**.

Programmes 2015 pour le cycle 3, p. 210



On trouve dans les programmes 2015 en mathématiques pour le cycle 3 une incitation à **faire appréhender de plusieurs façons un même objet ou une même propriété géométrique** aux élèves :

« Différentes caractérisations d'un même objet ou d'une même notion s'enrichissant mutuellement permettent aux élèves de passer du regard ordinaire porté sur un dessin au regard géométrique porté sur une figure ».

Programmes 2015 pour le cycle 3, p. 210

Ces différentes appréhensions ont également des domaines de validité distincts et l'on mobilisera l'une ou l'autre selon le contexte, le problème posé, les instruments à disposition...

On retient ici deux idées phare des programmes de 2015 pour le cycle 3 en géométrie :

- il faut conduire les élèves d'une géométrie perceptive à une géométrie instrumentée qui s'appuie sur **l'explicitation des propriétés** en préparation d'une géométrie déductive,
- il est souhaitable de proposer **plusieurs caractérisations** d'une même propriété ou d'un même objet.

Le parallélisme au cycle 3

On trouve essentiellement deux types de tâches :

- contrôler le parallélisme de deux droites,
- tracer deux droites parallèles, la distance entre ces deux droites étant donnée, ou tracer une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné.

Dans les programmes de 2015, ces tâches sont répertoriées dans la compétence « **Reconnaître et utiliser quelques relations géométriques** :

- *Effectuer des tracés correspondant à des relations de perpendicularité ou de parallélisme de droites et de segments.*
- *Perpendicularité, parallélisme (construction de droites parallèles, lien avec la propriété reliant droites parallèles et perpendiculaires). »*

Deux droites parallèles sont :

- deux droites qui ne se coupent jamais ;
- deux droites perpendiculaires à une même troisième ;
- deux droites ayant un écartement constant ;
- deux droites portées par les côtés opposés d'un rectangle, d'un carré, d'un parallélogramme, d'un trapèze ou d'un losange ;
- deux droites ayant la même direction ;
- deux droites ayant même pente dans un réseau quadrillé ;
- deux droites passant par les milieux de deux côtés d'un triangle ;
- etc.

Quelle(s) caractérisation(s) pour le cycle 3 ? Quel ordre d'introduction ?

- deux droites qui ne se coupent jamais → **définition spontanée des élèves mais qui ne fournit pas de procédé de tracé. Pour la vérification, elle n'est pas toujours opératoire dans l'espace graphique.**
- deux droites perpendiculaires à une même troisième → **repose sur la propriété de perpendicularité déjà étudiée depuis le CE1. Fournit un procédé de tracé et un procédé de vérification.**
- deux droites ayant un écartement constant → **fournit un procédé de tracé et un procédé de vérification. Suppose que la notion de distance d'un point à une droite est connue (bien que très rarement travaillée dans les classes). Les élèves doivent aussi comprendre qu'il est suffisant de vérifier que l'écartement entre les deux droites est le même en deux lieux distincts.**

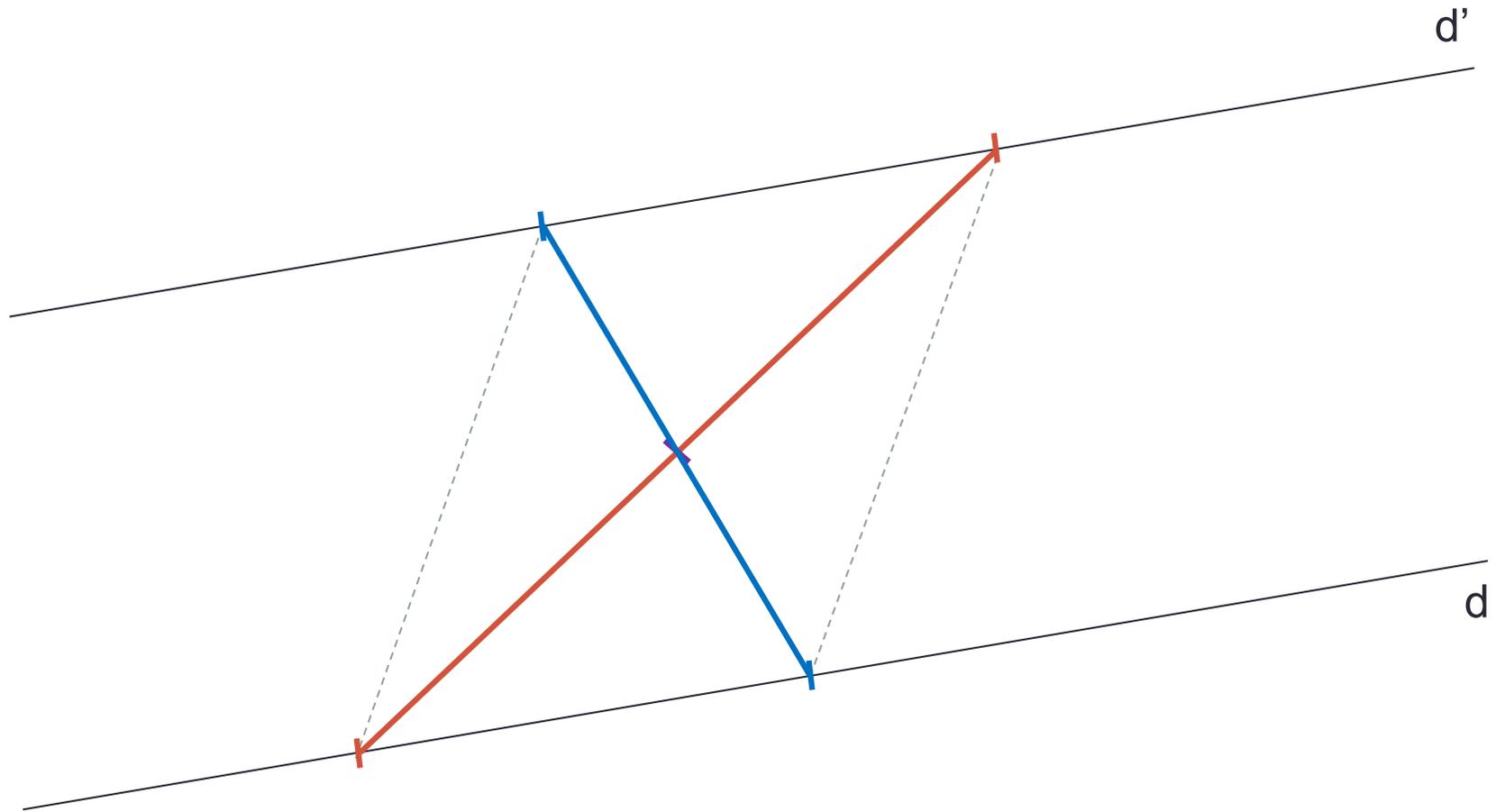
- deux droites portées par les côtés opposés d'un rectangle, d'un carré, d'un parallélogramme, d'un trapèze ou d'un losange → **repose sur les propriétés des quadrilatères usuels qui ont été étudiés précédemment.**

Remarque : le trapèze ne figure pas explicitement dans les programmes 2015 pour le cycle 3 et l'étude spécifique du parallélogramme n'est proposée qu'en 6^{ème} et « est notamment l'occasion d'un retour sur la notion de parallélisme ».

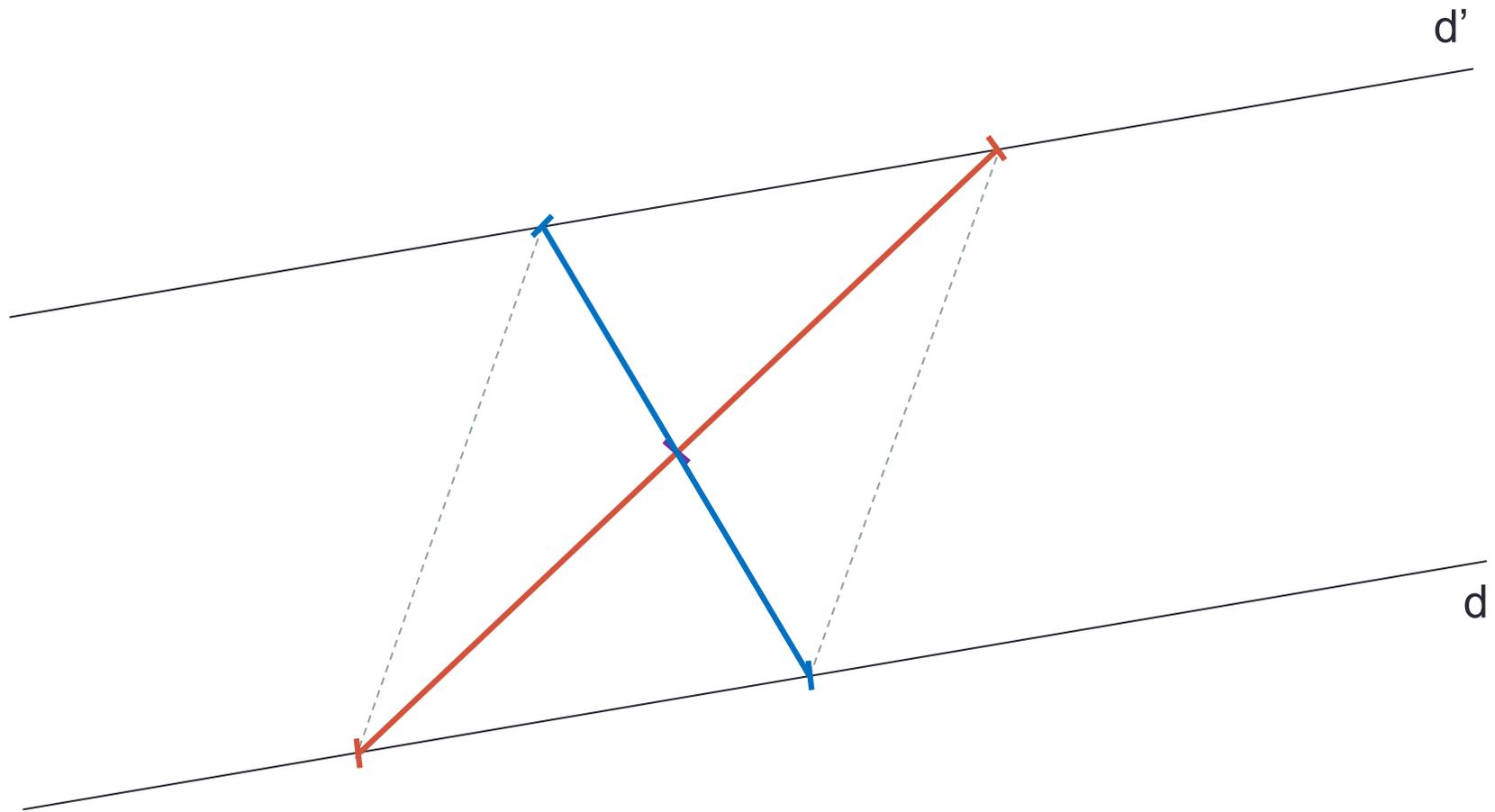
Fournit un procédé de tracé de deux droites parallèles et un procédé de vérification du parallélisme de deux droites, par exemple en utilisant les propriétés des diagonales.

Exemple : procédure par les diagonales du parallélogramme

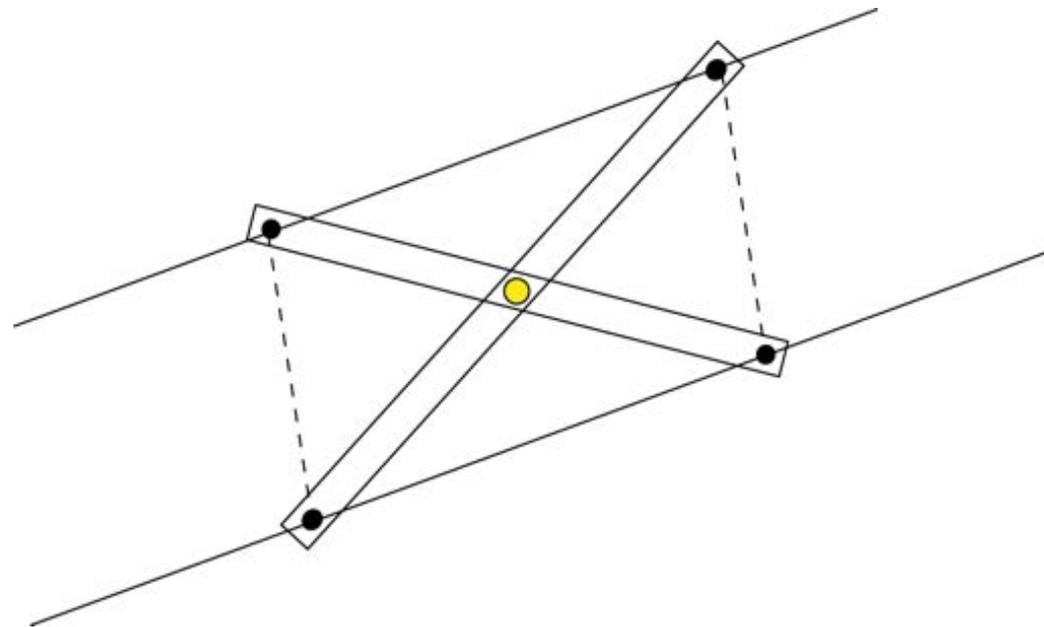
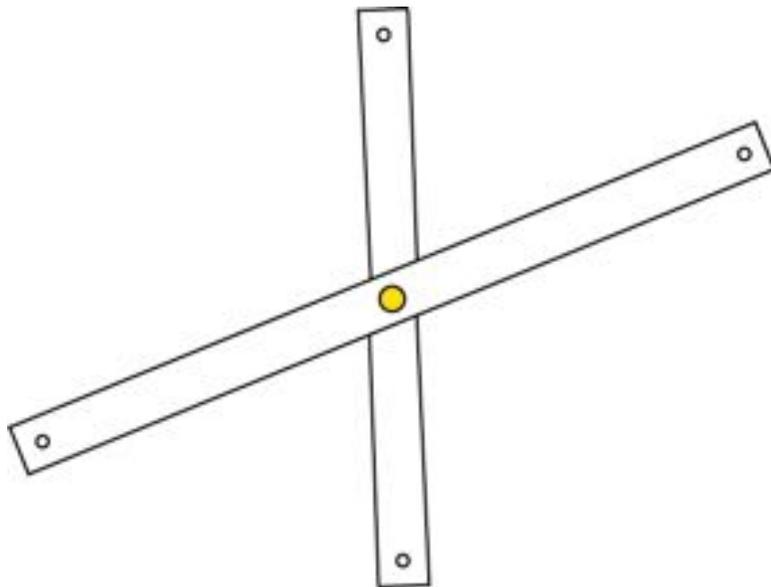
Pour vérifier le parallélisme de deux droites :



Pour tracer une droite parallèle à une droite donnée passant par un point donné :



Avec une « machine à diagonales » faite de deux bandes de bristol percées et d'une attache parisienne ou d'un rivet :



- deux droites ayant la même direction ; deux droites ayant même pente dans un réseau quadrillé → **notions non travaillées avant ou en cycle 3.**
- deux droites passant par les milieux de deux côtés d'un triangle → **cas particulier du théorème de Thalès peu approprié en cycle 3.**

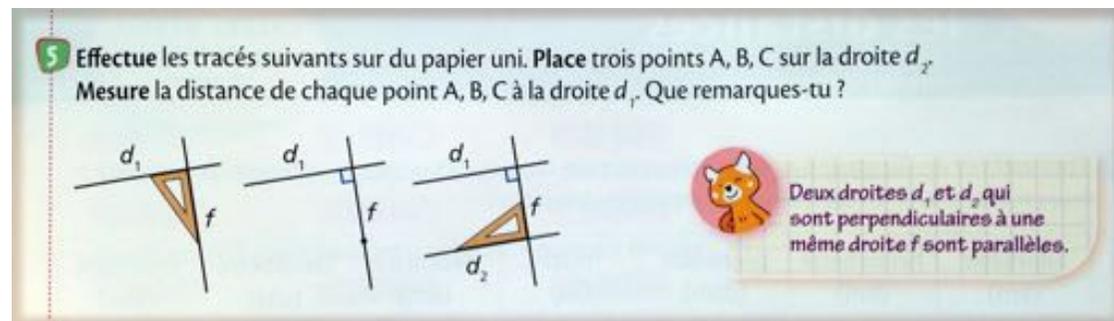
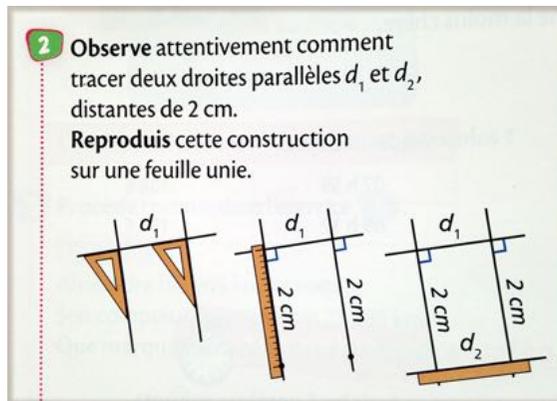
Ordre d'introduction :

- On prend en général appui sur les conceptions initiales des élèves : **« deux droites parallèles sont deux droites qui ne se coupent jamais »**.
- De cette première définition, il est aisé d'aboutir à **« deux droites parallèles sont deux droites qui gardent un écartement constant »**.
- On peut dans un second temps introduire le procédé par « double-perpendicularité » : **« deux droites parallèles sont deux droites perpendiculaires à une même troisième »**.
- Une troisième caractérisation reposant sur les propriétés de quadrilatères usuels peut être proposée : **« deux droites parallèles sont deux droites portées par les côtés opposés d'un rectangle/parallélogramme/trapèze/etc. »**.
- Autres propositions ?

Dans les manuels

Manuels de CM1 et CM2

- Deux droites parallèles sont d'abord définies comme étant deux droites « qui ne se coupent pas ».
- Puis la procédure par écartement constant est trouvée de manière systématique.
- La procédure par double-perpendicularité y est la plupart du temps mais elle n'est pas omniprésente.



Manuels de 6^{ème}

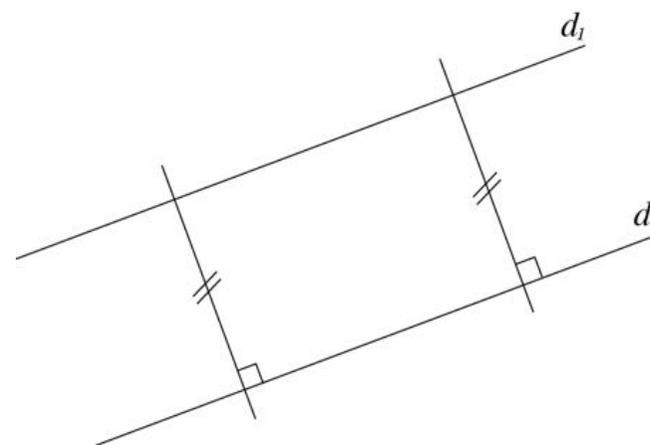
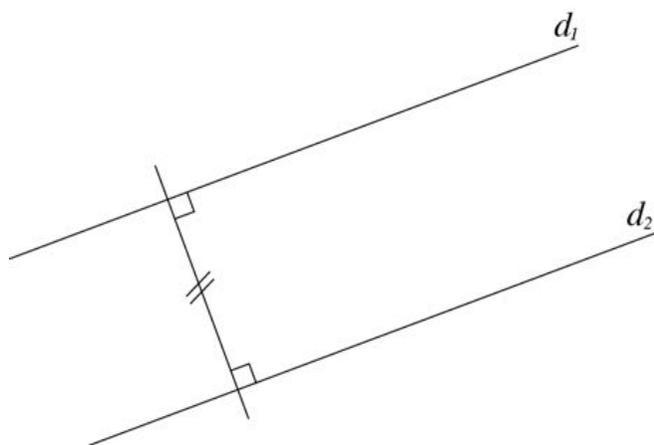
- On donne la définition de deux droites sécantes, puis deux droites parallèles sont définies comme étant deux droites non sécantes → idem qu'en CM1-CM2 avec une nouvelle terminologie.
- Plusieurs propositions sont énoncées et admises, dont en particulier : « *Si deux droites sont parallèles, alors toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre* » et « *Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors ces deux droites sont parallèles* ».
- Il en découle la procédure par double-perpendicularité comme procédé de construction et de vérification.
- La procédure par écartement constant est alors souvent proposée comme procédé de construction mais pas de vérification.
- Le parallélogramme est alors défini comme « *un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles* » et on apprend à le construire.

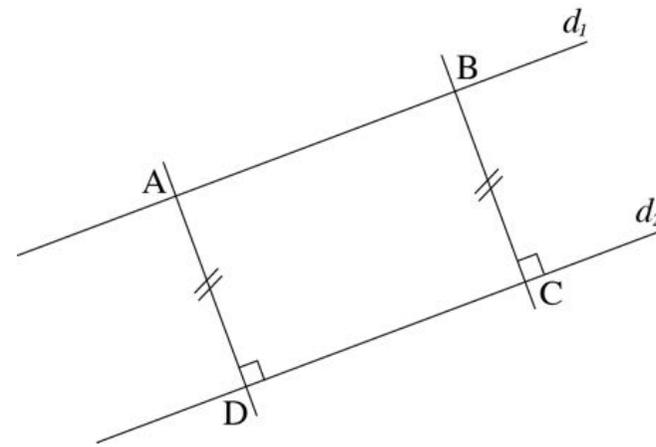
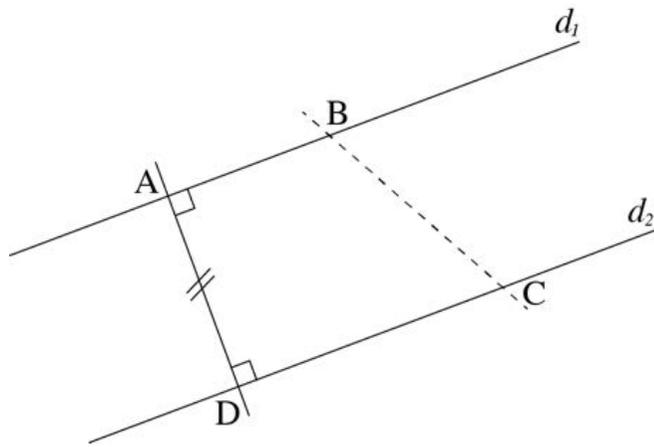
Justification des procédés

- Dans les manuels de CM1, de CM2 ou de 6^{ème}, une justification de la validité de ces procédés n'est que très rarement entreprise auprès des élèves.
- Cela peut occasionner chez eux des difficultés dans la compréhension du concept.
- De plus, cela ne s'inscrit pas dans la volonté sous-jacente des programmes de 2015 d'amener les élèves à passer d'une géométrie perceptive à une géométrie instrumentée qui s'appuie sur l'explicitation de propriétés, pour aller vers une géométrie déductive. L'articulation école-collège qui réside désormais au cœur du cycle 3 est marquée par un changement de contrat vis-à-vis des moyens de preuve.

Un exemple en classe

Une PES exhibe avec ses élèves de CM2 les procédures par écartement constant et par double-perpendicularité. Un élève remarque qu'avec la double-perpendicularité, il a tracé deux angles droits et pris une mesure, alors qu'avec l'écartement constant, il a tracé deux angles droits et pris deux mesures. Dans son esprit, puisque ces deux constructions aboutissent au même résultat, c'est qu'on a fait une mesure pour rien dans la procédure par écartement constant !





L'une des deux est généralement plus économique que l'autre. Ce constat peut conduire les élèves à favoriser exclusivement la procédure la plus économique ou à supprimer l'une des étapes supposée inutile de la procédure la plus coûteuse.

Cela montre bien la nécessité d'explicitier les propriétés des figures en jeu dans les procédés enseignés, le lien entre ces propriétés et les instruments convoqués dans les tracés et le fait que les procédures étudiées aboutissent au même résultat mais ont des coûts différents.

Une proposition de séquence

Des critères de départ :

1. elle peut être mise en place en CM1, en CM2 ou en 6^{ème}
→ *se doter de supports de travail communs pour créer des liens entre les enseignants du primaire et ceux du secondaire ;*
2. plusieurs procédés sont exhibés ;
3. ils s'appuient sur des propriétés connues des élèves qui en expliquent la validité ;
4. l'étude de plusieurs procédés est justifiée, lors d'un problème final, par le fait qu'on utilise l'un ou l'autre en fonction du contexte, des instruments, des contraintes, *etc.*, même si l'un des procédés est plus économique qu'un autre.

Séance 1 : la **procédure par écartement constant** est exhibée puis utilisée pour contrôler le parallélisme de deux droites, reproduire deux droites parallèles et construire deux droites parallèles distantes d'un écartement donné.

Séance 2 : on fait émerger la **procédure par double-perpendicularité** lors de la résolution d'un problème dans lequel seule l'équerre est disponible et en s'appuyant sur des propriétés connues des figures usuelles.

Séance 3 : on étudie la **procédure par les diagonales du parallélogramme** que l'on exerce ensuite dans une série d'activités de vérification ou de construction de droites parallèles.

Séance 4 : un **problème de synthèse** permettant de mobiliser ces trois procédures est proposé aux élèves. On illustre le fait que ce sont les contraintes matérielles de la situation qui conduiront à favoriser l'une ou l'autre de ces procédures.

Quelques extraits vidéo

Les extraits vidéos qui suivent ont été filmés dans des classes des trois niveaux du cycle 3 dans lesquelles la séquence a été menée :

- la classe de CM1 de Ruta Skujins à l'école Jean de la Fontaine de Martignas sur Jalles ;
- la classe de CM2 de Stéphanie Masrevery à l'école Olympe de Gouges de Bruges ;
- la classe de 6^{ème} de Sophie Dutaut au collège Georges Lapierre de Lormont.



Séance 1 en CM1 au mois de novembre

Les élèves font usage du double-décimètre comme d'un « macro-instrument » (Offre, Perrin-Glorian & Verbaere, 2006).



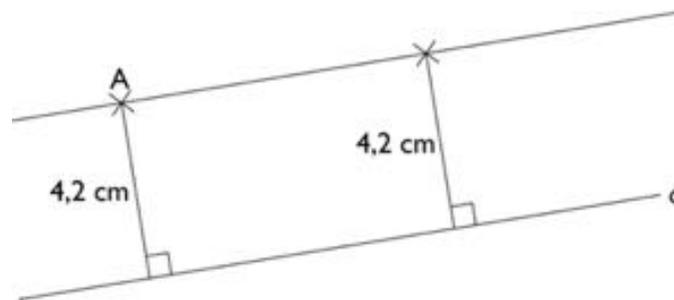
Le premier argument avancé est peu convaincant au regard de la consigne initiale : avec leur méthode, les élèves discriminent correctement les droites parallèles des droites non-parallèles et obtiennent parfois des mesures plus précises que s'ils avaient utilisé les instruments souhaités !



Application : reproduire deux droites parallèles. Les élèves tiennent compte de l'orientation de la figure par rapport aux bords de la feuille, ce qui se répercute sur les procédures mobilisées.

→ intérêt d'une activité de restauration (une droite déjà tracée) ?

À l'issue de la séance 1, l'affiche suivante a été conservée :



On remarque qu'on voit apparaître un rectangle, ce qui s'explique par le fait que dans un rectangle, les côtés opposés sont parallèles. Les figures usuelles connues comportant deux côtés opposés parallèles sont collectivement exhibées : carré, rectangle, losange, parallélogramme, trapèze, trapèze rectangle → affiche.

Tâche : tracer une droite parallèle à d et passant par A en n'utilisant que l'équerre.

- L'équerre ne peut être utilisée que pour tracer des angles droits ou des traits droits.
- Parmi les figures usuelles que l'on a identifiées, seuls le rectangle et le trapèze rectangle peuvent être tracés sans mesures de longueurs.
- Le problème consiste maintenant à déterminer comment, connaissant un côté et un sommet du côté opposé, finir de tracer le rectangle ou le trapèze rectangle avec l'équerre seule.

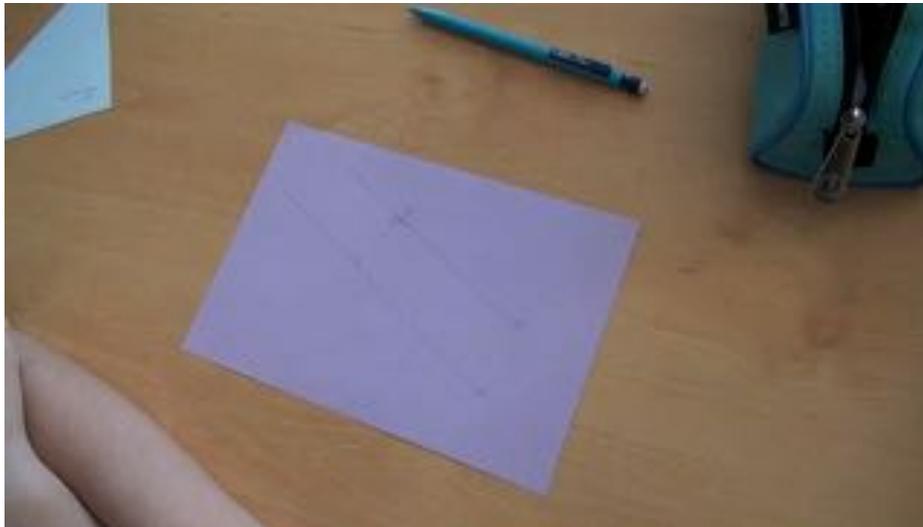
Séance 2 en CM2 au mois de décembre

Les élèves tentent de réinvestir la procédure exhibée en séance 1.



La consigne est alors précisée.





La procédure attendue apparaît.

Lors de la mise en commun, c'est le tracé du trapèze rectangle qui est mis en avant car il est plus économique pour réaliser la tâche.

On note également qu'il est inutile de tracer le quatrième côté du trapèze pour obtenir deux parallèles.



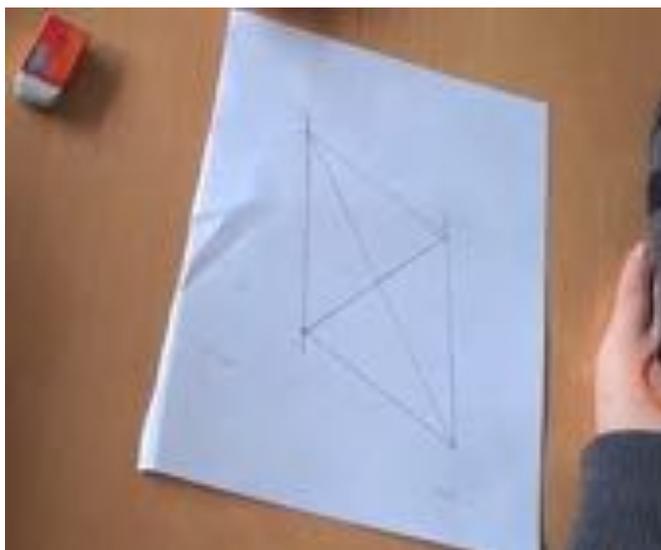
Les deux méthodes sont comparées collectivement.



Séance 3 en CM2 au mois de décembre

Les élèves tracent les diagonales des 6 quadrilatères usuels ayant des côtés opposés parallèles et identifient celles qui ont des propriétés particulières.

Comment tracer un parallélogramme à l'aide de ses diagonales pour obtenir deux droites parallèles ?



Essais individuels

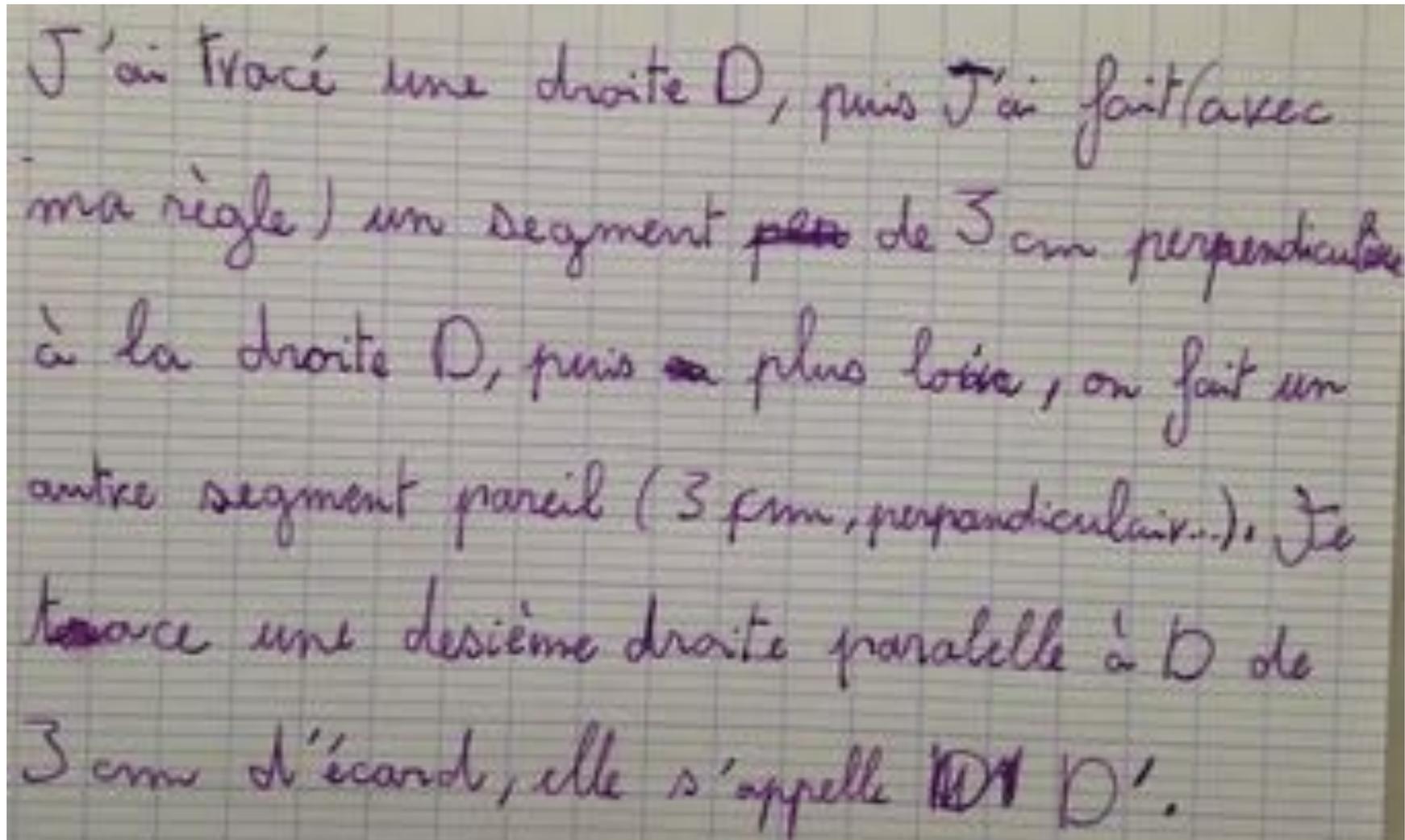


Mise en commun

Il faut savoir déterminer la moitié d'une longueur qui n'est peut-être pas un nombre entier de centimètres, à moins d'avoir bien choisi le segment.

En 6^{ème} au mois de mai : séance 1 (séances 1 et 2 de la séquence).

Trace une droite parallèle à une droite d distante de 3 cm de d et décris à l'écrit ta procédure.



J'ai tracé une droite D , puis J'ai fait (avec ma règle) un segment ~~per~~ de 3 cm perpendiculaire à la droite D , puis ~~à~~ plus loin, on fait un autre segment pareil (3 cm, perpendiculaire...). Je trace une deuxième droite parallèle à D de 3 cm d'écart, elle s'appelle ~~D~~ D' .

Procédure par écartement constant

J'ai tracé la droite d avec mon équerre, ensuite j'ai placé l'angle de mon équerre à un point (n'importe où) et j'ai tracé 3 cm à la verticale.

segment de
3 cm



Après j'ai placé mon équerre à l'horizontale.



Et enfin j'ai tracé la droite d'en la prolongant des 2 côtés

Procédure par double-perpendicularité

J'ai tracé la droite (d) en suite
tracé deux ~~droite~~ segment perpen-
diculaire à la droite (d) et j'ai
ensuite tracé une droite
perpendiculaire à mes deux
segments. Les deux droites
sont parallèles.

Procédure « mixte »

Tout d'abord, j'ai fait une droite qui
ce nomme (d') puis j'ai tracé une
ligne de 3cm vers le milieu, ou la
ligne de 3cm s'arrête j'ai tracé
une droite pareil que la première
et pour vérifier qu'il sont bien
parallèles, j'ai pris l'équerre et
je l'ai posé sur la ligne de 3cm

Procédure erronée : l'équerre est utilisée a posteriori comme outil de vérification du tracé effectué.



Séance 2 : procédure par les diagonales du parallélogramme (séance 3 de la séquence initiale).

Consigne plus ouverte qui permettra éventuellement que la procédure émerge des élèves.

En 6^{ème}, des usages détournés des instruments demeurent.



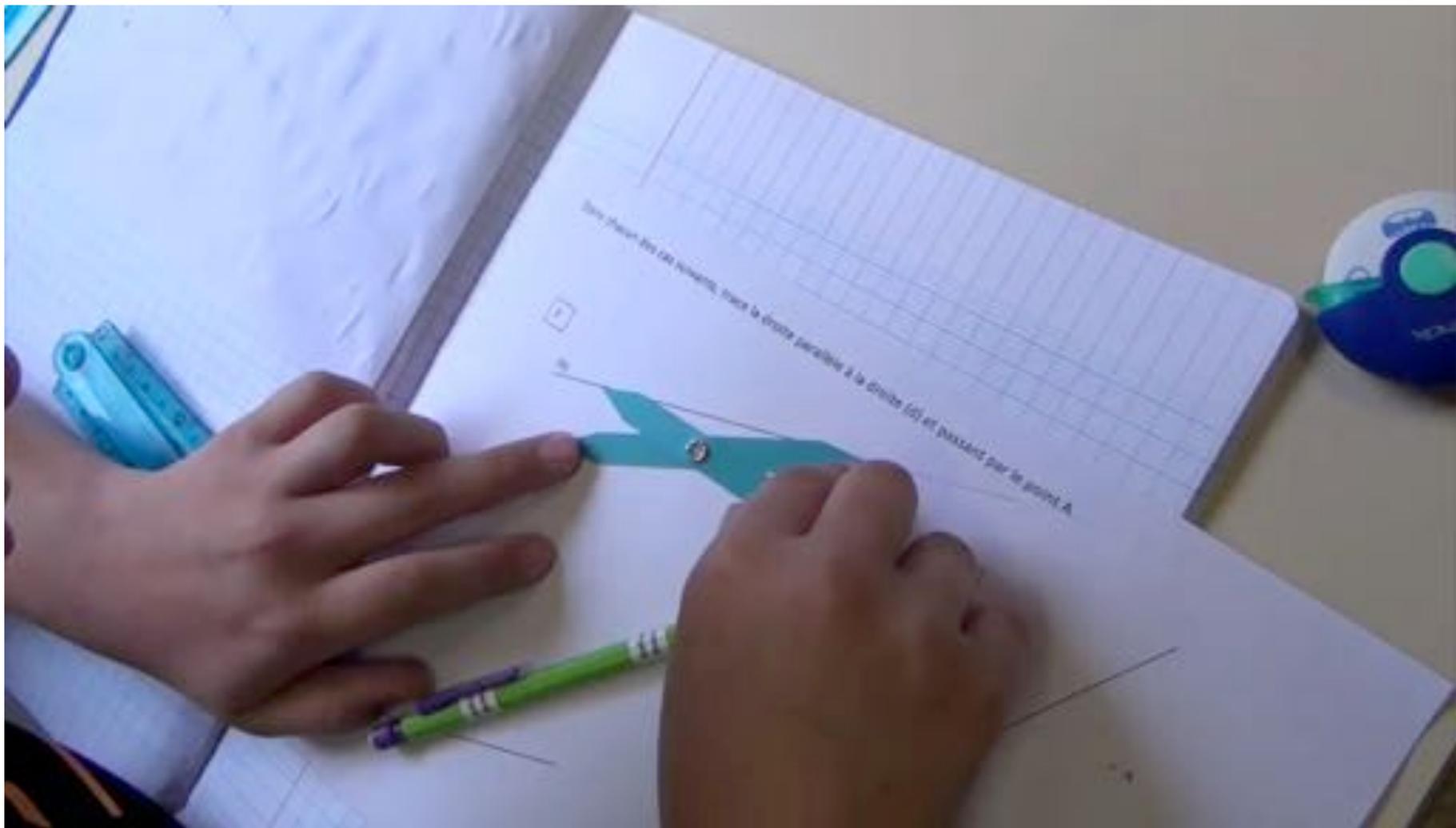
La procédure émerge lors du débat.



Plusieurs essais pour obtenir une « machine » fonctionnelle.



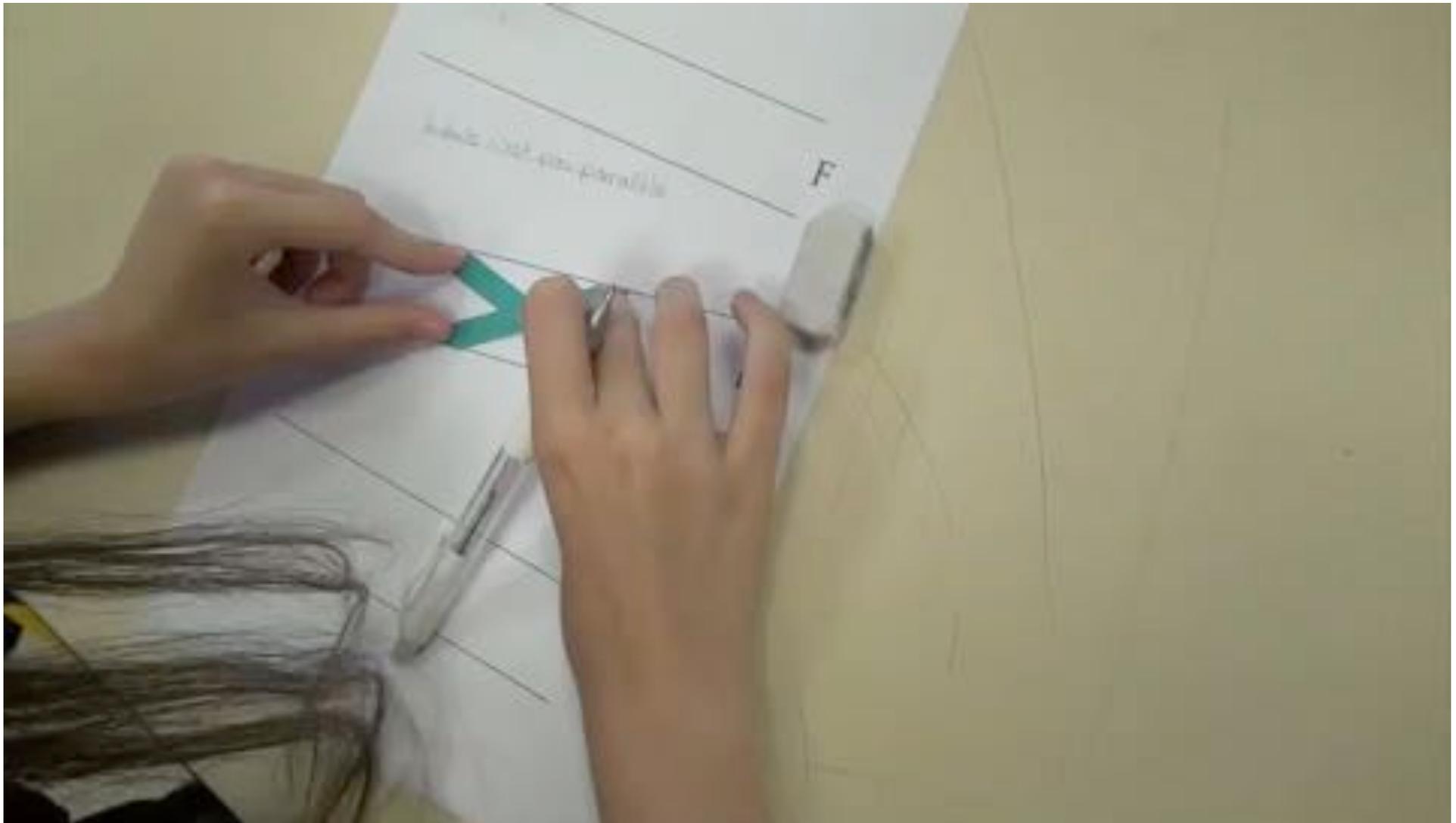
Présentation de la « machine à diagonales ».



Utilisation de la machine pour construire une parallèle à une droite donnée passant par un point donné.



Séance 3 : le problème de synthèse (séance 4 de la séquence initiale).
L'enseignante rappelle quel usage il est permis de faire des instruments.



C'est la procédure par écartement constant qui est utilisée le plus facilement, devant celle utilisant la « machine » à diagonales.

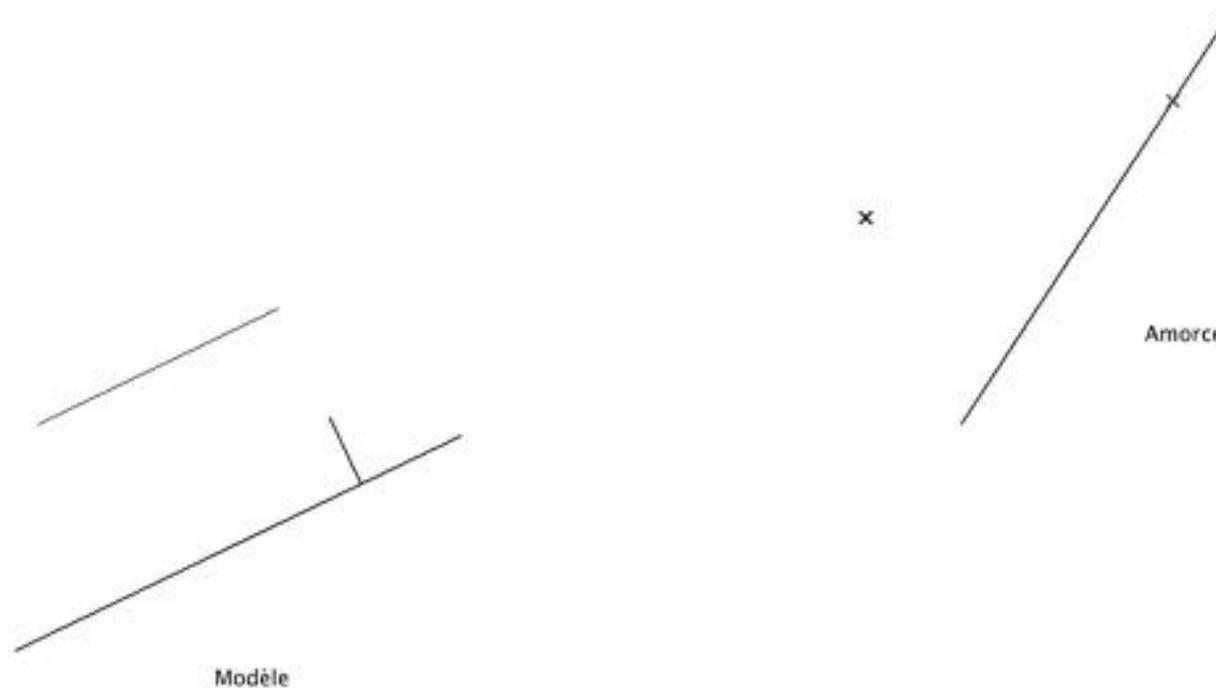
Malgré les précautions de l'enseignante, on voit encore apparaître des usages détournés des instruments.



Synthèse de séance : vers l'idée de démonstration.

Autre exemple de problème de synthèse : restauration de figure

Il faut restaurer le modèle à partir de l'amorce en trouvant la procédure la moins coûteuse.



Seuls les instruments cités dans le tableau des barèmes peuvent être utilisés. Chaque **tracé** effectué sur l'amorce avec un des instruments cités coûte le montant indiqué dans le tableau. Toute information prise sur le modèle à l'aide des instruments cités dans le tableau est gratuite.

Instrument	Coût
Équerre	1 €
Règle non-graduée	2 €
Compas	3 €
Règle graduée	5 €
Gomme	0 €

La procédure par écartement constant coûte 9 €.
 Celle **par double-perpendicularité** coûte 5 €.
 Celle par les diagonales du rectangle 17 €.
 Celle au compas et à la règle non-graduée coûte 13 €.

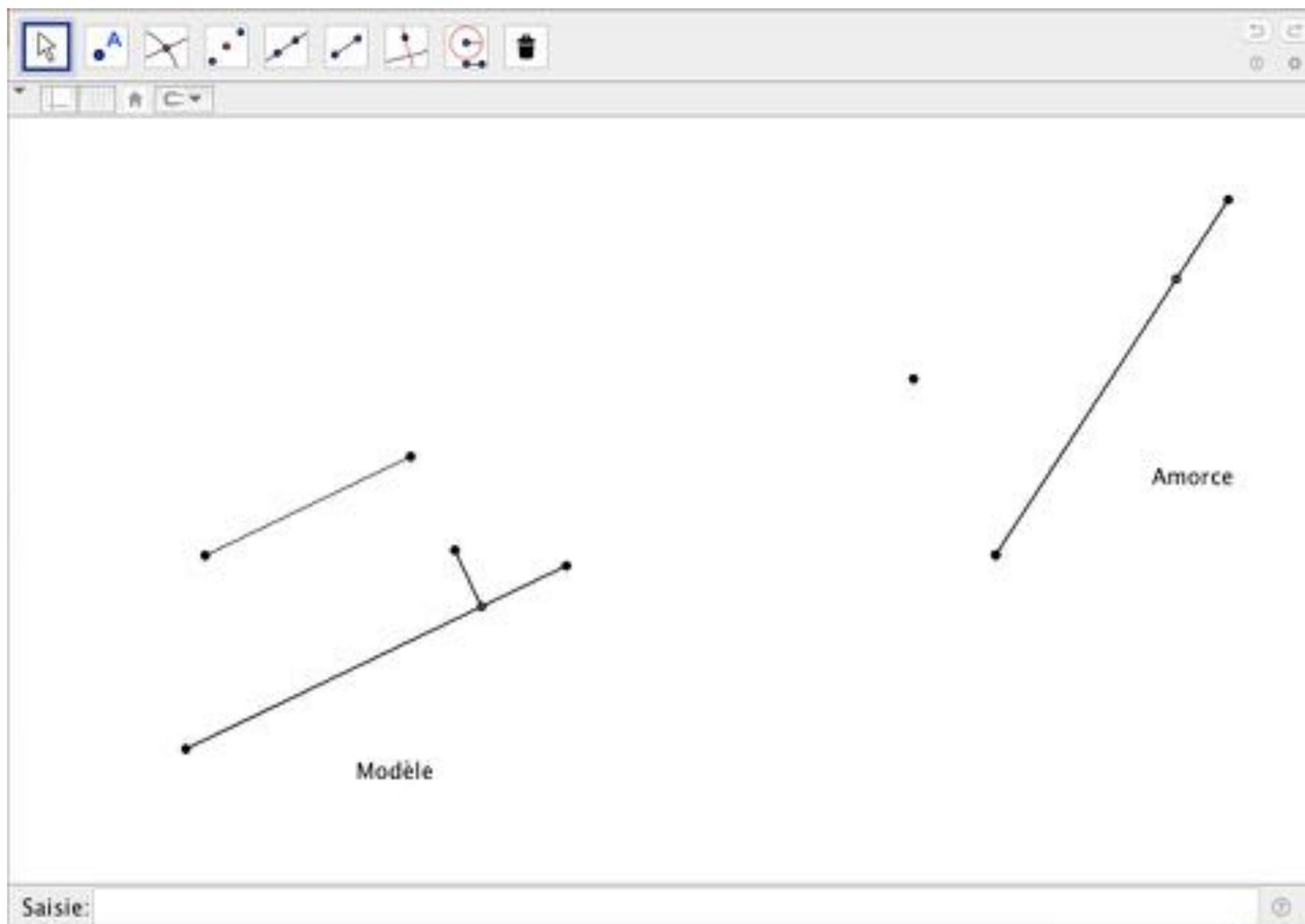
La procédure **par écartement constant** coûte 14 €.
 Celle par double-perpendicularité coûte 15 €.
 Celle par les diagonales du rectangle 17 €.
 Celle au compas et à la règle non-graduée coûte 19 €.

Instrument	Coût
Équerre	6 €
Règle non-graduée	1 €
Compas	3 €
Règle graduée	2 €
Gomme	0 €

La procédure par écartement constant coûte 11 €.
 Celle par double-perpendicularité coûte 14 €.
 Celle **par les diagonales du rectangle** coûte 10 €.
 Celle au compas et à la règle non-graduée coûte 11 €.

Instrument	Coût
Équerre	6 €
Règle non-graduée	2 €
Compas	5 €
Règle graduée	3 €
Gomme	0 €

Avec GeoGebra



Outil	Coût
Milieu ou centre	5 €
Droite	2 €
Segment	2 €
Perpendiculaire	1 €
Compas	3 €

La procédure par écartement constant coûte 11 €.
 Celle **par double-perpendicularité** coûte 8 €.
 Celle par les diagonales du rectangle 19 €.
 Celle au compas et à la règle non-graduée coûte 15 €.

La procédure **par écartement constant** coûte 14 €.
 Celle par double-perpendicularité coûte 15 €.
 Celle par les diagonales du rectangle 19 €.
 Celle au compas et à la règle non-graduée coûte 15 €.

Outil	Coût
Milieu ou centre	1 €
Droite	1 €
Segment	1 €
Perpendiculaire	5 €
Compas	3 €

La procédure par écartement constant coûte 13 €.
 Celle par double-perpendicularité coûte 15 €.
 Celle **par les diagonales du rectangle** coûte 11 €.
 Celle au compas et à la règle non-graduée coûte 12 €.

Outil	Coût
Milieu ou centre	5 €
Droite	2 €
Segment	2 €
Perpendiculaire	4 €
Compas	3 €