

## **Conf. 02 : Ressources pour les professeurs au cycle 3. Quand un instrument de calcul ancien s'invite dans une classe utilisant les nouvelles technologies**

Caroline Poisard

ESPE de Bretagne – UBO, laboratoire du CREAD, IREM de Brest; caroline.poisard@espe-bretagne.fr

*Résumé : Nous présentons ici une réflexion sur le travail des professeurs avec des ressources. Pour illustrer notre propos nous nous appuyons sur un travail de recherche de plusieurs années qui a abouti à la production de ressources. Les ressources produites sont des ressources pour la classe (la mallette « boulier chinois à l'école » disponible en ligne) et un parcours de formation pour les professeurs (disponible sur la plateforme nationale M@gistère). Les savoirs en jeu sont la numération décimale, les nombres décimaux et le calcul. Tout d'abord, nous montrons des exemples d'appropriations par des professeurs de ces ressources. Les professeurs combinent des ressources matérielles (boulier chinois matériel, fiches papier/crayon, etc.) et virtuelles (logiciels, applications, etc.) afin de répondre à leurs objectifs. L'usage des nouvelles technologies permet en particulier pour le professeur de mettre en œuvre une démarche d'investigation et également de développer l'autonomie des élèves. Ensuite, nous analysons des travaux d'élèves de cycle 3 en précisant les savoirs mathématiques en jeu. Nous montrons que l'analyse des procédures et des erreurs des élèves est une ressource centrale pour le professeur.*

*Mots clefs : ressources virtuelles et matérielles ; boulier chinois ; nombres et calcul ; liaison CM2-6ème*

### **1. Introduction : entre recherche et formation**

#### **1.1 La didactique des mathématiques : un domaine de recherche**

Notre propos se situe entre recherche en didactique des mathématiques et formation des professeurs. La didactique des mathématiques est un domaine de recherche qui s'intéresse à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques, de la maternelle à l'université dans le contexte scolaire, mais également en dehors du contexte scolaire (musées, associations, etc.). Son objet d'étude prend en compte le professeur et les élèves en fonction d'un savoir mathématique précis et identifié. En tant que domaine de recherche, la didactique des mathématiques développe des cadres théoriques (avec des concepts) et des méthodologies de recueil et de traitement de données. L'analyse en didactique des mathématiques consiste en particulier en l'analyse de données recueillies qui sont mises en relation avec les concepts d'un (de) cadre(s) théorique(s) choisi(s). Ceci permet d'aboutir à des résultats de recherche qui décrivent les phénomènes d'enseignement et d'apprentissage en fonction d'un savoir mathématique. Une des applications des résultats de recherche se fait par la formation des professeurs. Cette formation est dispensée actuellement en particulier dans les Master MEEF (Métiers de l'enseignement, de l'éducation et de la formation) pour les professeurs des écoles (PE), professeurs des lycées et collèges (PLC), mais également au sein de la mention PIF « pratiques et ingénierie de formation » qui permet une formation continue des professeurs à et par la recherche en éducation. Pour le travail présenté ici, ce sont nos travaux de recherche en didactique des

mathématiques qui nourrissent des propositions concernant la formation des professeurs et la production de ressources pour la classe.

## 1.2 Nos choix théoriques et méthodologiques

Le cadre théorique qui sous-tend notre réflexion est celui de l'approche documentaire (Gueudet et Trouche 2010, Poisard, Bueno-Ravel, et Gueudet 2011, Gueudet et Bueno-Ravel 2016). La notion de ressources pour le professeur y est centrale. Les professeurs combinent des ressources matérielles (boulier chinois matériel, fiches papier/crayon, etc.) et virtuelles (logiciels, applications, etc.) afin de répondre à leurs objectifs. Nos travaux précédents ont analysé des pratiques de professeurs des écoles (Poisard, Tournès et Cochet 2016, Bueno-Ravel et Harel 2016, Poisard, Gueudet et Robin 2016), nous proposons également ici des exemples pour la classe de 6ème. L'usage des nouvelles technologies permet en particulier pour le professeur de mettre en œuvre une démarche d'investigation et également de développer l'autonomie des élèves. Nous souhaitons ici montrer que les procédures (ou techniques) des élèves sont une ressource centrale pour le travail du professeur. C'est pour cela que nous articulons l'approche documentaire avec d'autres cadres théoriques, en particulier la notion de registre de représentation (Duval 1996) et l'analyse praxéologique (Chevallard 1999). Le nombre est codé selon différents registres en jeu ici : boulier matériel, boulier virtuel, écriture en chiffres, écriture en lettres, etc. Par l'analyse de plusieurs tâches soumises à des élèves de cycle 3 et suivant le registre en jeu, nous montrons que les techniques mobilisées par les élèves révèlent de savoirs différents (Poisard, 2005). Sur les aspects méthodologiques de cette recherche, l'idée importante est celle d'un travail collaboratif entre enseignants-chercheurs, formateurs et professeurs. Les échanges entre les membres du groupe sont primordiaux pour ce type de recherche : des réunions régulières permettent un travail de partage d'expérience, d'analyse de séances testées et de diffusion en formation. Les données recueillies sont celles habituellement utilisées en didactique : observations et vidéos des classes, entretiens avec professeurs et élèves, travaux d'élèves. Pour le traitement des données filmées ou enregistrées, leur transcription permet d'analyser des phénomènes.

## 1.3 Produire des ressources pour la classe et pour la formation

Ce travail de recherche de plusieurs années (Poisard et al 2015) a abouti à la production de ressources pour la classe, en particulier la mallette « boulier chinois à l'école » disponible en ligne<sup>1</sup>, et un parcours de formation pour les professeurs disponible sur la plateforme nationale M@gistère (Poisard et al 2016). La mallette « boulier chinois » contient des fiches pour la classe, des vidéos, des trames de séquences, un entretien avec des professeurs, un livret pour le professeur, etc. Les trames et fiches produites ont été testées en classe, discutées et analysées lors des réunions et à nouveau testées en classe. Quels ont été nos choix ? D'un part, toutes les fiches sont téléchargeables et modifiables pour permettre aux professeurs de s'approprier les fiches, de les modifier selon leurs objectifs. D'autre part, les trames de séquences (ou scénarios) comportent des analyses de travaux d'élèves et/ou des extraits de transcriptions de séances de classe. Le parcours de formation M@gistère contient l'ensemble des ressources de la mallette et est complété par des extraits vidéos de classe. Nous avons également rédigé deux quiz pour structurer le parcours. En effet, notre choix a été de proposer un parcours en cinq étapes : les étapes 1, 3 et 5 sont en présence et les étapes 2 et 4 à distance. Pour les temps à distance, un forum est disponible et un quiz est proposé qui permet de

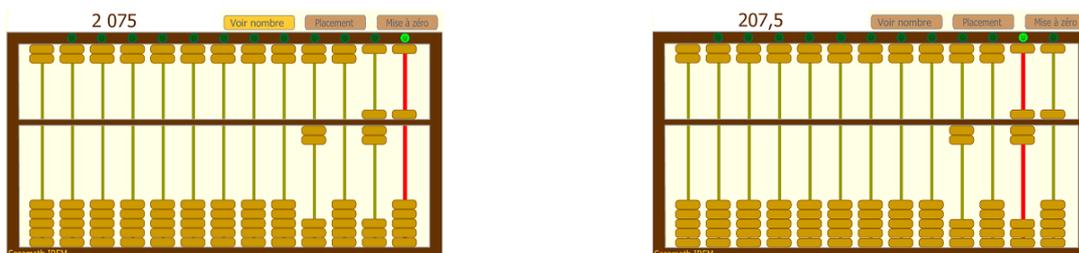
---

1 Mallette « boulier chinois à l'école » : [http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page\\_id=611](http://python.espe-bretagne.fr/blog-gri-recherche/?page_id=611)

préparer la séance suivante. Argumentons nos choix également. Tout d'abord, ce type de formation ne peut pas se dérouler entièrement à distance, des temps en présence sont essentiels. En classe, les appropriations des professeurs montrent qu'une nouvelle ressource (utilisant les nouvelles technologies ou non) est intégrée parmi d'autres mais ne remplace pas l'existant. Il en est de même pour les formations, il nous semble essentielle de combiner des temps en présence et à distance, de ne pas aller vers le « tout numérique ». D'autre part, un des objectifs importants de la formation est la production de trames de séquences incluant l'analyse de séances qui sont mutualisées entre les participants. Ceci rejoint donc la notion de travail collaboratif que nous développons nous-même pour nos travaux. Un travail d'analyse de l'appropriation de ce parcours par des formateurs est en cours. Ces choix concernant la production de ressources pour la classe et le parcours de formation sont donc étroitement imbriqués avec nos objectifs de recherche.

Afin d'analyser des exemples de mise en œuvre en classe et de travaux d'élèves, il nous faut présenter la ressource en jeu : le boulier chinois. Deux principes permettent de comprendre son mode de fonctionnement (Figure 1) :

- Chaque tige du boulier correspond à un rang de la numération. Pour l'exemple de 2 075, la tige des unités est à droite, puis en allant vers la gauche : dizaines, centaines, unités de mille, etc. Pour les nombres décimaux (par exemple 207,5), il suffit de décaler la tige unités vers la gauche pour avoir des rangs disponibles pour la partie décimale. Sur le boulier virtuel, la tige unités est en rouge ce qui permet de la repérer.
- Dans la partie supérieure, il y a deux boules par tige appelées *quinaires* qui valent chacune cinq (5, 50, 500, etc. selon le rang). Dans la partie inférieure, il y a cinq boules par tiges appelées *unaires* qui valent chacune un (1, 10, 100, etc. selon le rang).



**Figure 1 : Inscriptions de 2 075 et de 207,5 sur le boulier chinois virtuel<sup>2</sup>**

Nous appelons la barre centrale la *barre de lecture* car les boules sont activées vers cette barre centrale, sur le boulier matériel, les boules peuvent être claquées vers la barre de lecture en un seul geste pour inscrire les nombres plus grands que 5 sur une tige. Dans chaque rang, il est possible d'inscrire de 0 à 15, ce qui permet d'avoir plusieurs inscriptions possibles pour un même nombre. Nous appelons *inscription économique* l'inscription qui déplace le moins de boules possible. Nous allons maintenant présenter des exemples de mises en œuvre au cycle 3 par des professeurs.

## 2. Exemples de mises en œuvre dans des classes de cycle 3

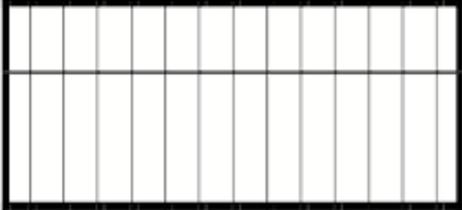
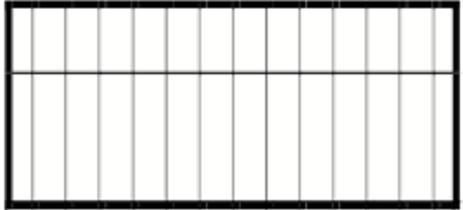
Nous présentons trois études de cas : les appropriations de la mallette « boulier chinois » par trois professeurs. Pour chacune, nous présentons les objectifs des séquences, les ressources (utilisées ou

<sup>2</sup> Le boulier chinois virtuel est un logiciel de Sésamath : [http://cii.sesamath.net/lille/exos\\_boulier/boulier.swf](http://cii.sesamath.net/lille/exos_boulier/boulier.swf) téléchargeable sur la mallette « boulier chinois » (version locale).

créées) qui nous paraissent centrales ainsi que les principaux choix des professeurs. C'est en particulier les entretiens menés et transcrits, les trames de séquences et les discussions lors des réunions qui permettent cette analyse. Les concepts de l'approche documentaire sous-jacents sont la notion d'orchestration des ressources par le professeur, la mise à la main des ressources (instrumentalisation) et la modification des connaissances du professeur (instrumentation).

## 2.1 Appropriation d'Élodie en CM23

Pour Élodie, l'objectif des séances avec le boulier est de travailler sur la numération décimale (notions de chiffre et de nombre), sur les groupements et les échanges, sur la distinction entre valeur et quantité et sur la décomposition des nombres. Concernant les ressources, elle a combiné celles déjà existantes et a également produit une nouvelle fiche pour travailler sur l'inscription en lettres des chiffres et la décomposition des nombres (Figure 2).

INSCRIPTION PROPOSÉE SUR LE BOULIER				INSCRIPTION ÉCONOMIQUE SUR LE BOULIER		
						
Nombre activé de :	Centaines de mille cM	Dizaines de mille dM	Unités de mille uM	Centaines C	Dizaines D	Unités U
Quinaires						
Unaires						
Décomposition du nombre inscrit sur le boulier :						
Décomposition économique du nombre :						
Écriture chiffrée :						

**Figure 2 : Extrait de la fiche créée par Élodie**

Lors des séances, Élodie a choisi de travailler par investigation en posant des questions de recherche aux élèves, en proposant des temps de recherche puis des phases de validation où les élèves proposent des réponses. Les élèves débattent donc des différentes réponses, justes ou fausses. Lors de cette séance, la classe n'est pas équipée de vidéo-projecteur et Élodie utilise un cadre de boulier en papier avec des aimants pour montrer les différentes propositions à la classe pour en débattre. Pour la première séance, Élodie a choisi un découpage en quatre phases (séance de 45 min) :

- Phase 1 : La découverte du boulier est proposée aux élèves à partir des questions. Qu'est-ce que cet objet ? À quoi sert-il ? Après plusieurs propositions des élèves dont un babyfoot (par rapport à la partie qui compte les points), il est convenu que cet objet est un boulier et qu'il est utilisé par des marchands pour calculer.

- Phase 2 : La question à l'étude est ici : Comment fonctionne le boulier ? Après un temps de travail en groupes (20 minutes environ), les différentes propositions sont argumentées et débattues. Le professeur précise que l'on peut inscrire des grands nombres et écarte donc les propositions qui se limitent à 71 ( $13 \times 7$ ) et 676 ( $13 \times 2 + 13 \times 50$ ).
- Phase 3 : Le professeur propose les inscriptions économiques des nombres 12 puis 7. À partir de ces deux exemples, le mode d'emploi du boulier est alors stabilisé.
- Phase 4 : La dernière phase consiste en une synthèse sur le mode de fonctionnement du boulier (pour les nombres entiers), en précisant le vocabulaire important : les noms et valeurs des boules (unaires/quinaires) et le lien entre tige et rang de la numération.

Dans les séances suivantes, la notion d'inscription économique est travaillée, en particulier les questions suivantes ont été proposées : Combien de manière existe-t-il sur le boulier chinois pour inscrire 10 ? Pour inscrire 100 ? Pour inscrire 10 sur le boulier, lorsque la tige des unités est à droite, il y a trois possibilités : deux possibilités sur la tige des unités (2 quinaires ou (1 quinaire et 5 unaires) activées) et une possibilité sur la tige des dizaines (1 quinaire activées). Pour 100, avec toujours les unités à droite, il y a sept possibilités (Figure 3).

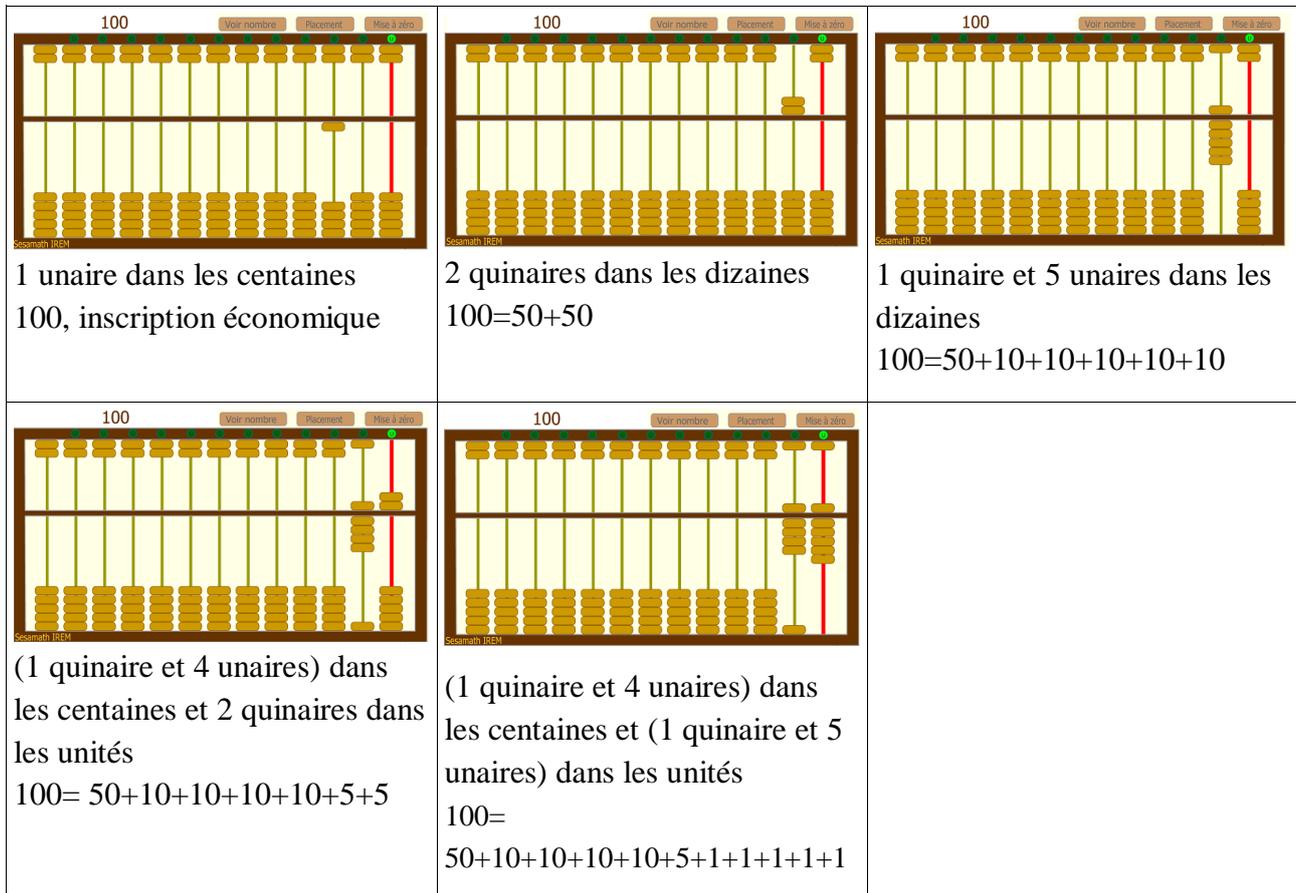


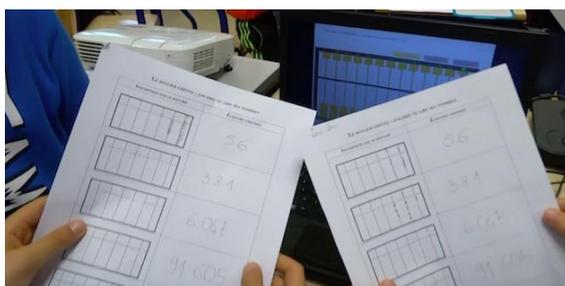
Figure 3 : Inscrire 100 sur le boulier

## 2.2 Appropriation de Rose en CM14

Pour Rose, l'objectif de la séquence est de « mieux comprendre le système d'échanges en numération avec des grands nombres et des nombres décimaux ». Elle utilise les ressources à

4 Voir également Poisard, Gueudet, Robin, 2016.

disposition dans sa classe : le vidéo-projecteur (avec le boulier virtuel) relié à l'ordinateur du professeur, le visualiseur (avec le boulier matériel) et les 15 ordinateurs portables pour les élèves. Elle a également repris le modèle de cadre de boulier disponible dans la mallette. Il était prévu pour être imprimé en A3 et utilisé avec aimants au tableau. Rose a repris ce cadre plastifié en A4 pour chaque élève qui est utilisé comme une ardoise (avec des feutres). Ceci permet à Rose de mettre en place des séances boulier régulièrement, sur des temps courts, en articulant boulier virtuel, matériel et fiche plastifiée. Rose a également intégré l'usage du boulier dans sa progression : dans les fiches de « calcul rapide » utilisées quotidiennement, des lectures de nombres sur le boulier sont proposées (figure 4).



CALCULS RAPIDES						
Pour chaque calcul, inscrire + lorsque la réponse est bonne et rapide. inscrire - lorsque la réponse est fausse.						
DATES⇒	13/juin	14/juin	15/juin	16/juin	17/juin	Résultats
<i>Lecture des nombres</i>						
	+	+	+	+	+	17
	-	+	+	+	+	0,4
	-	-	+	+	+	8,5
	-	-	+	+	+	5,9
	+	+	+	+	+	0,09
	-	-	-	+	+	0,52

**Figure 4 : Articulation des ressources pour Rose**

Concernant ses choix, Rose a travaillé par investigation, en donnant une place centrale à la verbalisation des procédures des élèves qui sont argumentées et débattues en classe. La possibilité de projeter les bouliers (vidéoprojecteur et visualiseur) est importante car elle permet de montrer à la classes les procédures et d'engager une discussion argumentée. La question de l'autonomie des élèves est en jeu avec l'utilisation du boulier j3p (figure 5) qui est un logiciel qui permet un retour sur la réponse, juste ou fausse, avec des explications sur l'erreur éventuelle. Rose choisit d'utiliser le boulier j3p pour développer l'autonomie de travail des élèves. De plus, l'articulation de ressources déjà utilisées par Rose et de la nouvelle ressource boulier permet à Rose de revoir la présentation de sa fiche « tableau de numération » déjà présente en classe. Chaque élève a une fiche plastifiée du tableau de numération, parmi les ressources pour travailler sur la numération (écritures mixtes, langages, etc.). Une question importante pour Rose est la place de la virgule dans ce tableau et suite à l'analyse d'erreurs d'élèves pour inscrire des nombres décimaux sur le boulier, Rose revisite ce tableau et propose que la virgule apparaisse sur la ligne de séparation entre la partie entière et la partie décimale (figure 5). En effet, la fonction de la virgule décimale<sup>5</sup> est de séparer la partie

5

D'ailleurs, les pays anglo-saxons utilisent eux le « point décimal » à la place de la virgule.

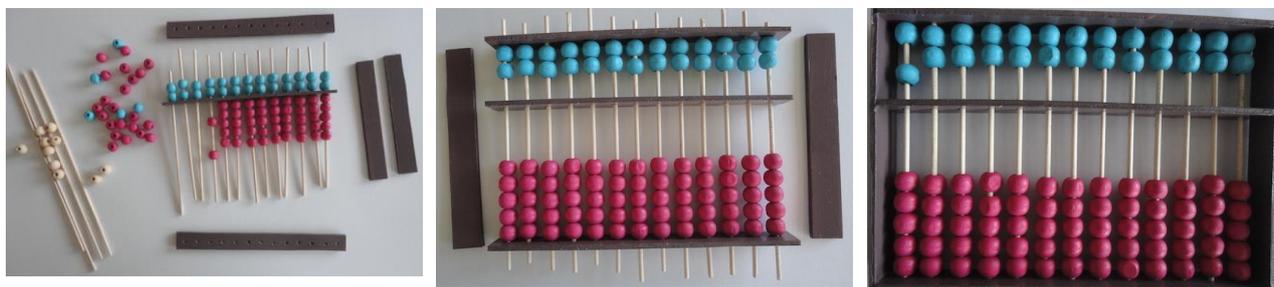


Comme nous le verrons plus loin, Mathilde trouve également intéressant les fiches papier-crayon. Des cartes auto-correctives pour travailler sur les grands nombres, et les fractions et décimaux ont également été fabriquées.



**Figure 6 : Cartes autocorrectives « additions et soustractions »**

Lors de sa deuxième année d'utilisation du boulier en classe, un des choix spécifiques de Mathilde est de proposer la fabrication du boulier : chaque élève construit un boulier en début d'année (en lien avec un projet d'accompagnement personnalisé AP, figure 7 et fiche7). Ce choix très fort est motivé par le souhait d'avoir le boulier en classe disponible lorsque nécessaire. En effet, lors de la première année, les élèves ont parfois demandé le boulier pour travailler certains aspects du nombre (multiples de 10) et il est important pour Mathilde de pouvoir y apporter une réponse favorable.



**Figure 7 : Fabrication du boulier chinois**

Nous avons donc détaillé plusieurs appropriations des ressources par des professeurs et décrit comment des nouvelles ressources se combinent aux ressources existantes en fonction des choix des professeurs. Certaines ressources sont également créées spécifiquement par les professeurs en fonction des objectifs d'apprentissages retenus. L'intégration de ressources utilisant les nouvelles technologies prend en compte les ressources existantes en combinant des ressources matérielles et virtuelles. Les ressources utilisant les nouvelles technologies ne remplacent pas d'autres ressources « traditionnelles ». De plus, l'appropriation de ressources permet un travail de réflexion en mathématiques et en didactique des mathématiques pour les professeurs.

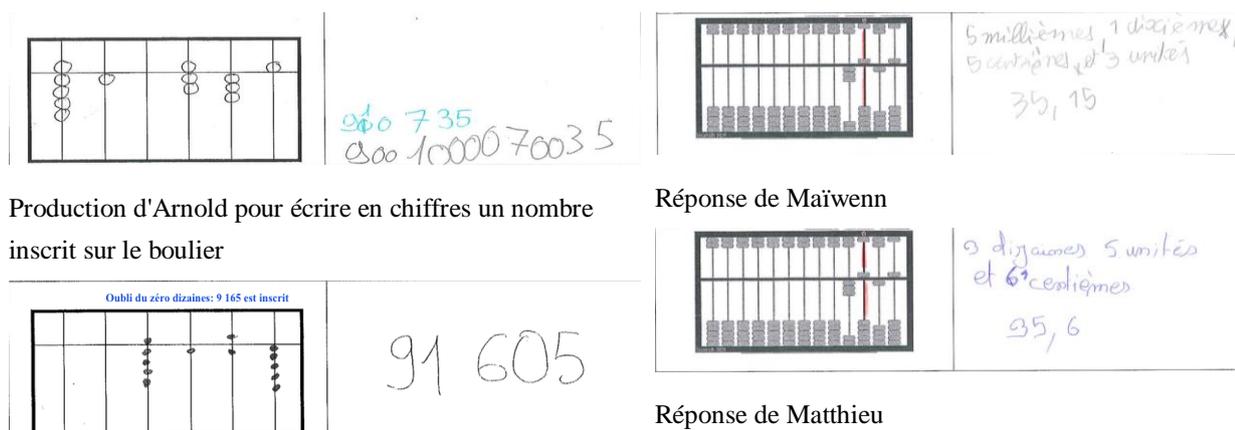
### **3. Exemples de travaux et de procédures des élèves**

L'analyse des procédures et des erreurs des élèves se base sur des travaux d'élèves (des fiches papier/crayon), sur les observations en classe, sur les discussions lors des réunions et sur les

entretiens avec les professeurs. La notion de registre est utilisée concernant les nombres qui sont codés sur le boulier, en chiffres et en lettres. L'analyse de tâches soumises aux élèves montre plusieurs techniques (ou procédures) relatives à des savoirs (technologies) et différents selon le registre en jeu. Nous montrons que l'analyse des techniques est une ressource centrale pour le travail documentaire des professeurs.

### 3.1 Les grands nombres et les décimaux au CM1 (Rose)

L'analyse de travaux d'élèves sur les grands nombres en CM1 a été décrite dans Poisard et al 2016. Nous l'augmentons ici d'exemples de travaux d'élèves sur les nombres décimaux (figure 8) et sur la question de recherche : « On considère que la tige de droite forme les unités, si toutes les boules sont activées : quel nombre est alors inscrit ? ».



Production d'Arnold pour écrire en chiffres un nombre inscrit sur le boulier

Réponse de Maïwenn

Production de Yann pour inscrire sur le boulier un nombre écrit en chiffres

Réponse de Matthieu

**Figure 8 : Exemples de travaux d'élèves de CM1**

Nous pointons deux erreurs assez classiques de compréhension de la numération : le lien entre la signification orale et chiffrée des nombres et le problème de compréhension des zéros intercalés dans un nombre. Le boulier permet d'identifier ces erreurs (ou de les repérer à nouveau) et de faire un travail de remédiation. Les tâches demandées sont : « écrire en chiffres un nombre entier inscrit sur le boulier » (Arnold) et « inscrire sur le boulier un nombre écrit en chiffres » (Yann). Sur le boulier proposé à Arnold, le nombre inscrit est 910 735 c'est-à-dire en toutes lettres : « neuf-cent-dix-mille-sept-cent-trente-cinq ». Arnold écrit ce qu'il entend en le lisant : 900 10 000 700 35. Pour Yann, le nombre à inscrire sur le boulier est 91 605, mais il inscrit 9 165 car il ne prend pas en compte l'inscription du zéro sur le boulier. Il ne laisse pas la tige des dizaines à zéro.

Afin d'évaluer les apprentissages des élèves, il est important de leur demander d'écrire en chiffres et en lettres les nombres afin de bien repérer les éventuelles difficultés. Nous analysons ici deux erreurs d'élèves pour un exercice qui propose un nombre décimal inscrit sur un boulier chinois. La consigne pour les élèves est : « écrire ces nombres en lettres (unités, dixièmes, centièmes) et en chiffres ». Le nombre inscrit sur le boulier est 35,15 soit 35 unités, 1 dixième et 5 centièmes (figure 8). Maïwenn donne une réponse juste pour l'écriture en chiffres mais ne donne pas la bonne signification des chiffres dans ce nombre. Il semble qu'il y ait une confusion entre le rang des unités et la position de la virgule. En effet, la virgule sert de séparateur entre la partie entière et la partie décimale et Maïwenn semble ne pas avoir acquis cela. De plus, elle mentionne les centièmes alors que seules deux tiges forment la partie décimale. Pour Matthieu, la réponse est juste pour l'écriture

en chiffres et en lettres de la partie entière : 35 soit 3 dizaines et 5 unités. Par contre, il ne considère pas les deux rangs de la partie décimale et ajoute les deux inscriptions comme si elles étaient sur une seule tige (celle des dixièmes).

Lors d'une séance, certains élèves ont cherché à répondre à la question : « Quel est le plus grand nombre inscriptible sur le boulier ? ». Sur cet exemple, Noé (figure 9) lit le nombre maximum inscrit sur une tige 15 (selon le rang) et écrit le calcul à effectuer. Il repère le numéro de la tige : 1 pour les unités, 2 pour les dizaines (15 dizaines vaut 150) , etc. jusqu'à la 13ème tige. Il n'a pas ici posé l'opération pour donner le résultat, mais sa démarche est pertinente.

Production de Noé sur la recherche du plus grand nombre inscriptible sur le boulier chinois

Analyse de la question de recherche pour un boulier à 13 tiges :

$$\sum_{i=0}^{12} 15 \times 10^i$$

$$\begin{aligned} &= 15 + 150 + 1\ 500 + \dots + 15 \times 10^{12} \\ &= 15 \times (1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^{12}) \\ &= 15 \times 1\ 111\ 111\ 111\ 111 \\ &= 16\ 666\ 666\ 666\ 665 \end{aligned}$$

C'est un nombre à 14 chiffres avec 12 six qui se lit : « 16 mille milliards 666 milliards 666 millions 666 mille 665 ».

**Figure 9 : Question de recherche, CM1**

### 3.2 Les nombres décimaux en 6è (Mathilde)

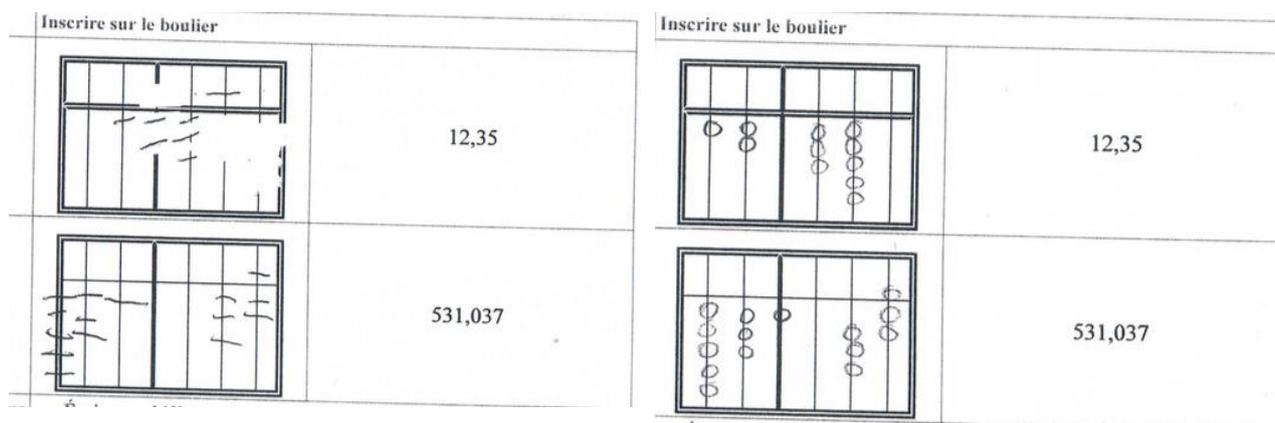
Mathilde enseigne à trois classes de 6ème et elle a proposé une fiche « test » à ses élèves au mois de mars. Nous avons recueilli 57 fiches que nous analysons ici. Cette fiche<sup>8</sup> comporte huit questions :

- quatre questions portent sur la tâche « inscrire des nombres sur le boulier (dessin) à partir des écritures chiffrées », les questions 1 et 2 proposent des grands nombres (91 605 et 231 880) et les questions 3 et 4 des nombres décimaux (12,35 et 531,037)
- quatre questions portent sur la tâche « écrire en chiffres et en lettres des nombres inscrits sur un boulier », les questions 5 et 6 portent sur des grands nombres (910 735 et 732 101) et les questions 7 et 8 portent sur des nombres décimaux (35,15 et 623,051).

Plusieurs registres sont en jeu : les bouliers (dessins ou copies d'écran), des nombres en chiffres et des nombres en lettres. Plusieurs variables didactiques sont à considérer : la nature des nombres (entiers ou décimaux), la taille des nombres (nombre de chiffres dans la partie entière et décimale), les zéros intercalés dans les nombre (ou non), le nombre de tiges proposées sur le boulier, le placement de la tige unité (ou non), etc. Nous avons choisi pour les questions 1 à 4 de proposer un boulier à six tiges et de fixer la tige des unités (en gras). Pour les questions 5 à 8, des copies d'écran du logiciel ont été faites, le boulier possède 13 tiges. Pour l'ensemble des questions, pour les

nombres entiers les unités sont à droite et pour les nombres décimaux la tige unité est la quatrième en partant de la droite.

Concernant les questions 3 et 4, quelques erreurs sont à constater par rapport à la virgule pour laquelle une tige est laissée vide (figure 10). Pour Morgan par exemple, 531,037 est inscrit sur 7 tiges en utilisant le cadre gauche du boulier pour inscrire les 5 centaines, la tige des unités n'est donc pas repérée comme un séparateur entre la partie entière et la partie décimale. Pour inscrire 12,35, Morgan propose une réponse juste, mais on constate que certaines tiges sont effacées et donc qu'une rectification a été faite. Pour Sasha, une erreur apparaît pour inscrire 12,35 qui est faite sur cinq tiges avec une tige laissée vide qui semble indiquer la virgule. L'inscription de 521,037 est elle juste, mais on peut s'interroger sur la signification pour cette élève d'une tige vide : est-ce que cela correspond à zéro dixième ou bien à la virgule (ce qui serait alors une erreur) ?

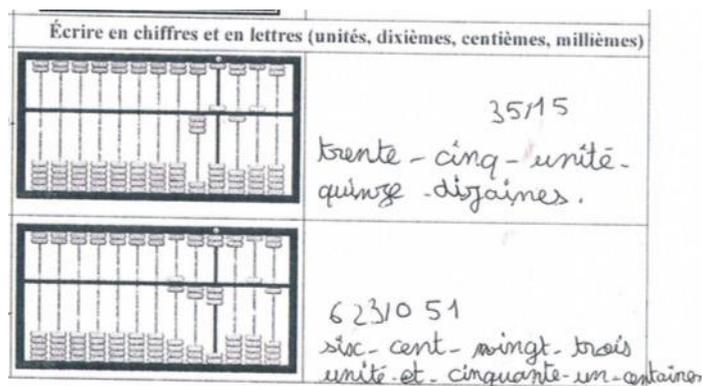


Réponse de Morgan

Réponse de Sasha

**Figure 10 : Travaux d'élèves de 6ème, questions 3 et 4**

Concernant les questions portant sur l'écriture en lettres des nombres, un seul élève utilise une écriture mixte « 35 unités 1 dixième et 5 centièmes », alors que les autres élèves qui fournissent une bonne réponse écrivent tous les nombres en lettres. Cet élève propose d'ailleurs des réponses justes à toutes les questions. Plusieurs élèves proposent des réponses du type « trente-cinq unités et quinze centièmes » que nous validons comme réponse juste. Pour les questions 7 et 8, nous comptabilisons 17 erreurs sur les 67 travaux. Pour 10 des 17 élèves qui n'ont pas fourni de bonne réponse, l'erreur est dans le vocabulaire utilisé qui n'est pas celui attendu c'est à-dire qu'il n'utilisent pas les mots dixième et/ou centième et/ou millième. Pour 9 de ces 10 élèves, « trente-cinq virgule quinze » est proposé et un élève fournit la réponse « trente-cinq et quinze ». Ces réponses qui sont d'un usage courant sont considérées ici comme fausses car l'objectif est de travailler le vocabulaire associé aux nombres décimaux afin de travailler sur le sens de ces nombres. On constate donc 7 autres erreurs pour les questions 7 et 8, nous notons en particulier les réponses de Pierre (figure 11) qui comportent une erreur assez fréquente (en début de cycle 3) : la confusion des mots dizaines/dixièmes et centaines/centièmes.



**Figure 11 : Exemple d'erreur 6ème, questions 7 et 8 (Pierre)**

Nous analysons ici les réponses d'une élève : Halima à l'ensemble des questions (figure 12). Pour les questions 5 à 8, le mot « unités » est systématiquement écrit pour terminer l'écriture en lettres des nombres. Pour les nombres entiers, ceci n'est pas d'usage, on dit « neuf-cent-dix-mille-sept-cent-trente-cinq » plutôt que ce que propose Halima : « neuf-cent-dix-mille-sept-cent-trente-cinq unités ». Les réponses aux questions 5 et 6 ne sont pas fausses, mais l'usage n'est pas de préciser les unités, ceci peut révéler un problème de compréhension pour cette élève. Par contre, pour les questions 7 et 8, l'écriture en lettres des nombres décimaux révèle un problème de compréhension de la numération : les dixièmes et les unités sont inversés pour 35,15 dont la réponse est « trente-cinq dixièmes et quinze unités ». Il semble donc que cette élève utilise un théorème en actes (Vergnaud 1990) : « les unités sont à droite » pour écrire les nombres entiers et décimaux en lettres. Ce théorème est utilisé par Halima pour répondre aux questions proposées, il donne des réponses justes pour les nombres entiers (même si la mention « unités » n'est pas d'usage au cycle 3), et des réponses fausses pour les nombres décimaux. Si on met en regard à cette analyse les réponses aux questions 1 à 4, on constate que cette élève a dessiné toutes les boules du boulier, même celles qui ne sont pas activées. Nous pouvons faire l'hypothèse d'un lien entre la nécessité de dessiner l'ensemble des boules et la non compréhension de certains aspects de la numération (pour les entiers et les décimaux) pour les élèves.



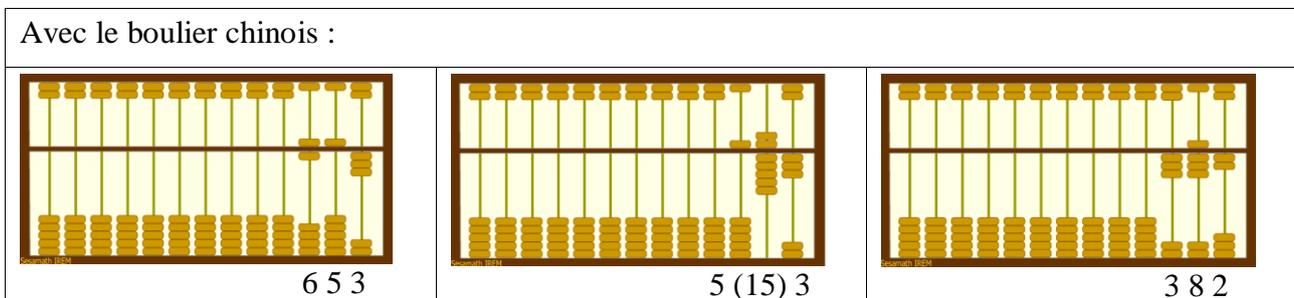
**Figure 12 : Analyse des réponses de Halima, 6ème**

Nous avons donc présenté des analyses de travaux d'élèves que nous considérons comme des ressources pour le professeur. Pour Élodie (CM2), le travail en classe de verbalisation qui est demandé aux élèves est central, il lui permet de mettre en place des séances de type investigation pour argumenter sur les procédures (justes ou fausses) qui sont verbalisées par les élèves. Pour Rose (CM1), c'est l'analyse de travaux d'élèves qui lui a permis d'identifier le problème de « non représentation » de la virgule sur le boulier et sur le tableau des nombres. Pour Mathilde (6ème), le travail de manipulation et les cartes auto-correctives sont importants dans les séances en classe,

mais suite au test, elle pense que : « C'est un test très intéressant qui m'a permis de mettre en place une sérieuse remédiation sur la lecture des nombres. Les élèves ont trouvé cela facile ! Et ils se sont très peu servi du boulier. » C'est donc bien l'analyse de ce travail écrit qui a permis à Mathilde d'envisager de nouvelles séances en classe.

### 3.3 La soustraction et l'addition sur le boulier

Il est intéressant de comparer différentes techniques pour effectuer des opérations (Poisard 2009, figure 13). Ces techniques sont caractérisées par des savoirs spécifiques et peuvent dépendre du registre en jeu. Pour effectuer la soustraction (653–271) sur le boulier, c'est la technique « par emprunts » (ou technique « par cassage », ou technique « anglo-saxonne ») que l'on peut effectuer « à la main » en déplaçant des boules. On emprunte une centaine à 653 que l'on écrit comme 10 dizaines. Sur le boulier, on désactive une unaire des centaines et on active une quinaire et 5 unaires dans les dizaines. On peut maintenant enlever 271 et lire le résultat : 382.



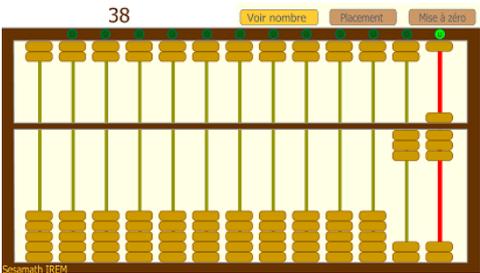
<p>La méthode par ajouts parallèles :</p> $\begin{array}{r} 6 \quad 5 \quad 3 \\ - 2 \quad 7 \quad 1 \\ \hline 3 \quad 8 \quad 2 \end{array}$ <p><math>653 - 271 = (653+100) - (271+100)</math> 100 s'écrit comme 10 dizaines (1ère ligne) puis une centaine (2ème ligne).</p>	<p>La méthode par emprunts :</p> $\begin{array}{r} 5 \\ \text{€} \quad 15 \quad 3 \\ - 2 \quad 7 \quad 1 \\ \hline 3 \quad 8 \quad 2 \end{array}$ <p><math>653 - 271 = (653-100+100) - 271</math> On casse les 6 centaines (1ère ligne), il ne reste que 5 centaines et on ajoute 10 dizaines aux dizaines, ce qui donne 15 dizaines.</p>
--	---

**Figure 13 : Différentes techniques pour calculer (653-271)**

La méthode par emprunts ne nécessite que des connaissances sur la numération de position. La méthode par ajouts parallèles, la plus répandue en France, est plus délicate à comprendre, elle nécessite de connaître la numération de position et aussi des propriétés opératoires. De plus, elle fait intervenir deux retenues que l'on écrit avec la même notation : 1, une retenue signifiant +10 et l'autre +1, ce qui est source de confusion.

Analysons maintenant l'addition (38+13). Cet exemple nous a été inspiré par un professeur des écoles qui a mis en place une séquence sur les nombres et les opérations avec le boulier en

CE1/CE2. Pour aider à la compréhension des trois techniques que nous analysons (figure 14), nous indiquons l'inscription de 38 sur le boulier.



Inscription économique de 38 sur le boulier chinois

Technique 1 :	Technique 2 :	Technique 3 :
<b><math>38+13 = 38+2+11</math></b>	<b><math>38+13 = 38 + 3 +10</math></b>	<b><math>38+13 = 38 + 20 -7</math></b>
On effectue : 38+2 <ul style="list-style-type: none"> <li>● échange 1 : 5 unaires contre 1 quinaire dans les unités</li> <li>● échange 2 : 2 quinaires dans les unités contre 1 unaire dans les dizaines</li> <li>● +11 (donc 40+11)</li> <li>● échange 3 : 5 unaires contre 1 quinaire dans les dizaines</li> <li>● lire 51</li> </ul>	On effectue 38 + (5 – 2) +10 : <ul style="list-style-type: none"> <li>● 38+5-2</li> <li>● échange 1 : 2 quinaires dans les unités contre 1 unaire dans les dizaines</li> <li>● +10 (1 dizaine) (donc 41+10)</li> <li>● échange 2 : 5 unaires contre 1 quinaire dans les dizaines</li> <li>● lire 51</li> </ul>	On effectue : <ul style="list-style-type: none"> <li>● 38 + 20 (2 dizaines)</li> <li>● - 7 (donc 58 – 7)</li> <li>● échange : 5 unaires contre 1 quinaire dans les dizaines</li> <li>● lire 51</li> </ul>

**Figure 14 : Différentes techniques pour calculer (38+13)**

La technique 1 comporte trois échanges : un échange entre colonnes (10 unités équivaut à 1 dizaine) et deux échanges dans une même tige entre 1 quinaire et 5 unaires (ou inversement). Le troisième échange permet d'obtenir une inscription économique dans les dizaines pour donner le résultat. Cette technique permet de travailler sur la notion d'échanges. La technique 2 fait appel à la décomposition 13 en 10+3 et aussi de 3 en 5-2. Cette technique prend en compte les caractéristiques du boulier car la quinaire des unités (non activée pour 38) est utilisée pour réaliser le calcul. Deux échanges sont nécessaires : un échange entre colonnes et un échange unaires/quinaires. La technique 3 est une technique de calcul mental réfléchi que l'on peut faire rapidement sur le boulier, 13 est considéré comme (20-7), étant donné que le nombre de départ est 38, l'ajout de 2 dizaines et le retrait de 7 unités est immédiat. Un seul échange unaires/quinaires est nécessaire pour que le résultat 51 soit donné sous forme d'inscription économique.

#### 4. Conclusions

Pour débiter l'apprentissage sur le boulier, les deux principales tâches sont : la lecture des nombres et l'inscription des nombres (entiers puis décimaux). Le travail sur le calcul avec le boulier peut ensuite être introduit. Les différents registres de représentation proposés ici : le boulier, les écritures en chiffres des nombres, les écritures en lettres des nombres permettent de varier les représentations du nombre pour les élèves. Duval (1996) montre l'importance pour apprendre les mathématiques de prendre en compte une variété des registres de représentations sémiotiques et de coordonner ces registres. La possibilité de comprendre les nombres dans différents registres et de les convertir dans différents registres est donc centrale pour l'apprentissage des élèves.

Ce travail montre la nécessaire appropriation de ressources par les professeurs. Chaque professeur retient certaines nouvelles ressources en les combinant avec d'autres déjà en usage, en fonction de ses objectifs d'apprentissage et des contraintes sur les disponibilités des ressources. L'étude du travail d'appropriation de la ressource boulier pour Élodie, Rose et Mathilde permet de décrire et d'analyser ce travail du professeur. Nous montrons que l'articulation de ressources matérielles et virtuelles permet un travail en classe qui met en avant : l'investigation des séances, l'autonomie des élèves et la différenciation du travail pour les élèves. L'analyse des travaux et des procédures possibles d'élèves permet d'identifier le travail des élèves comme une ressource centrale du professeur. Le travail d'analyse des techniques prend en compte l'analyse des erreurs des élèves en particulier pour proposer un travail adapté au niveau de connaissances de chaque élève afin que le travail soit motivant et permette des progrès pour chacun. De plus, nous décrivons différentes techniques possibles pour répondre à des tâches de calcul. En effet, suivant le registre en jeu, plusieurs techniques de résolution sont disponibles pour les élèves. Un temps de travail en classe sur l'analyse des techniques nous semble primordial pour permettre à chaque élève de progresser dans ses apprentissages en mathématiques.

*Remerciements aux professeurs et aux élèves qui ont participé à ce projet.*

## Références

- Bueno-Ravel, L. & Harel, C. (2016). Le calcul mental à l'école : apports du boulier chinois. *Mathematice 51*.
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques 16*(3), 349-382.
- Gueudet G., & Trouche L. (2010). Des ressources aux documents, travail du professeur et genèses documentaires. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs, le cas des mathématiques* (pp.57-74). Rennes : Presses Universitaires de Rennes et INRP.
- Gueudet, G., & Bueno-Ravel, L. (2016). Perspectives didactiques sur le boulier : un questionnaire renouvelé. *Mathematice 51*.
- Poisard, C. (2005). Les objets mathématiques matériels, l'exemple du boulier chinois, *Petit x*, 68, 39-67.
- Poisard, C., Bueno-Ravel, L., & Gueudet, G. (2011). Comprendre l'intégration des ressources technologiques en mathématiques par des professeurs des écoles. *Revue pour la Recherche en Didactique des Mathématiques*. 31-2, 151-189.
- Poisard, C., Gueudet, G., Bueno-Ravel, L. & Besnier, S. (2015, sept). Le plaisir de manipuler en mathématiques à l'école : ressources matérielles et virtuelles. *Les notes du CREAD*, 1.
- Poisard, C. Gueudet, G., Robin, R. (2016). Ressources technologiques en mathématiques : les grands nombres au CM1. *Math-Ecole*, 226, 18-22.

Poisard, C., Riou-Azou, G., D'hondt, D., & Moumin, E. (2016). Le boulier chinois : une ressource pour la classe et pour la formation des professeurs. *Mathematice 51*.

Poisard, C., Tournès, D., & Cochet, I. (2016). De l'abaque à jetons au boulier chinois : analyse d'une expérience au CE1. *Mathematice 51*.

Poisard, C. (2009). Boulier chinois et algorithmes de calcul. *Plot 27*, 22-25.

Vergnaud, G. (1990). La théorie et les champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques. 10/2.3*. 133-170.