

Grandeurs et géométrie

Colloque Mathématiques en cycle 3 – 9 juin 2017

Matthieu Gaud

IREM de Poitiers, Groupe collège





Sommaire

- Problématique
- Réponses apportées par l'IREM de Poitiers
- Débat

Savoir-faire socio
grammaire D4 Suivre une démarche scientifique **CHAPITRE 11 Fractions** 176

J'apprends à... → **J'utilise le modèle**

Multiplier un nombre par une fraction

ÉNONCÉ Effectuer chacun des calculs suivants en choisissant la méthode la plus simple :

a) $24 \times \frac{5}{4}$ b) $8 \times \frac{12}{3}$ c) $7 \times \frac{5}{6}$

D4 Pour les exercices 1 à 5, effectuer chaque calcul en utilisant la méthode qui paraît la plus simple.

1 a) $\frac{2}{3} \times 15$ b) $\frac{42}{7} \times 11$ c) $8 \times \frac{3}{4}$

2 a) $\frac{4}{8} \times 6$ b) $\frac{5}{2} \times 36$ c) $13 \times \frac{70}{7}$

Savoir-faire, chapitre Fractions, p 176, Collection Phare 2016 Cycle 3, Hachette Education

« A quoi ça sert, m'sieur ?... »



En cette période d'élections, votez !

« C'est au programme (p 202). Et puis, tu en auras besoin en cycle 4 »

« Sans ça, tu n'aurais pas de pacemakers, de portables, de fusée Ariane... »

« *Les mathématiques ne sont pas, de manière évidente, utiles au citoyen ; cela devra être démontré.* » (Rapport Claude Tellot, 2004)

« *Les exercices proposés dans les classes contribuent à l'image négative d'une discipline ressentie comme uniquement scolaire et éloignée de la vie.* » (Rapport de l'I.G.E.N. de 2007)

« Par pitié cher élève, ne me pose pas cette question... »



Corpus de « problèmes arithmétiques proposé en cycle 3 permettant d'enrichir le sens des opérations... » (p 201)

Un propriétaire possède 45 moutons et un autre 36. Ils les font garder par un seul berger qu'ils nourrissent, et à qui ils donnent 225 fr. de gages par an. La dépense de chaque propriétaire doit être en rapport avec l'importance de son troupeau. On demande combien de jours chacun d'eux devra nourrir le berger et quelle somme il lui donnera. (*Certificat d'études primaires - Aveyron*)

Un marchand de bois de chauffage en a vendu 56 stères à raison de 19 fr. à un drapier pour être payé en marchandises pour une égale valeur. Celui-ci offre à son créancier de la toile à 2fr.10, du drap à 14 francs, et du calicot à 2fr.90 le mètre : combien devra-t-il donner de mètres de chaque étoffe ?

En donnant 21 bottes de foin par semaine pour 9 chevaux, un pré, dont chaque hectare en fournit 135 bottes, nourrirait 2 400 chevaux pendant 36 jours. On demande combien ce pré contient d'hectares ?

Un boucher a donné 49 kilos de viande à un boulanger, à 80 centimes le kilo, pour acquitter un mémoire de pain : on demande combien le boulanger lui avait fourni de kilos de pain, sachant qu'un kilo de viande vaut 2 kilos 5 hectogrammes de pain.



Merci pour votre écoute !

Bonne journée !

Qu'en est-il de l'échelle de codétermination didactique ?



Re-sommaire

- La place des grandeurs dans la géométrie
- La place des grandeurs dans la vie des hommes
- Nos choix
- Notre mise en œuvre au cycle 3 de l'apprentissage de la géométrie
- Conclusion

La géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue. L'étendue a trois dimensions, longueur, largeur, hauteur.

(Legendre, *Eléments de géométrie*, 11^e éd., 1817)

La place des grandeurs dans la géométrie

Mais l'étude des aires et des volumes a une utilité plus haute qu'il faut envisager : elle fait comprendre comment, pour des fins pratiques, les hommes ont pu être conduits à construire la géométrie et elle justifie leur effort.

(Lebesgue, La mesure des grandeurs, 1935)



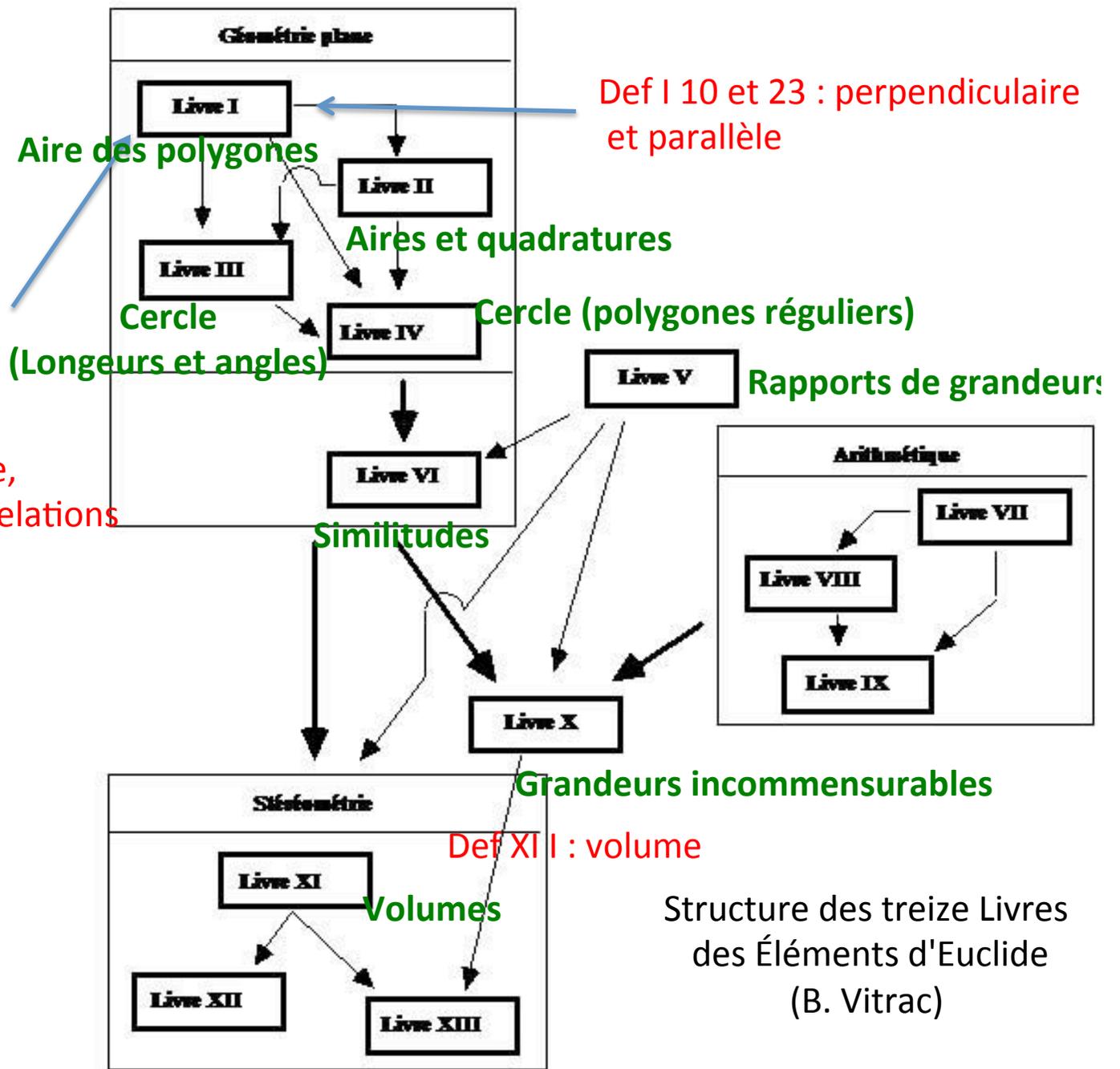
1) On ne peut pas faire de géométrie sans parler de grandeurs

Def I 2 : longueur

Def I 5 : aire (surface)

Def I 8 : angle

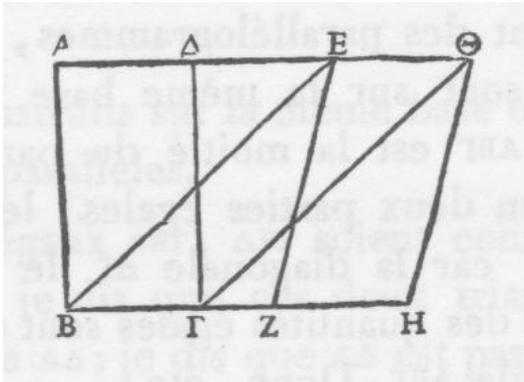
Def I 15 et 19 à 22 : cercle, triangles, quadrilatères, relations



Programmes du cycle 1 (p 13, BO Spé n°2 du 26 mars 2015)

Structure des treize Livres des Éléments d'Euclide (B. Vitrac)

2) On ne peut pas parler de grandeurs sans faire de géométrie



Prop I 36 :

Les parallélogrammes qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux

Les grandeurs et la géométrie sont intimement liés. (Au point que certains termes de la géométrie désignent tout à la fois l'objet et sa grandeur.)

3) Les problèmes concernant les grandeurs irriguent la géométrie

- Le problème de la comparaison et du calcul des aires planes et des volumes
- Le problème de la quadrature des figures planes
- Le problème du partage des angles
- Le problème de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré
- Le problème de la mesure de la circonférence du cercle

Les problèmes concernant

- l'agrandissement et la réduction des figures,
- la mesure des grandeurs inaccessibles,
- le repérage,
- le calcul de la longueur des courbes,
- le problème des isopérimètres, des surfaces et volumes minimaux ...

4) Des grandeurs sans mesure à la mesure des grandeurs

Grandeurs



Mesure des grandeurs → Connaissance des nombres

Mesure des grandeurs

5) On peut partir des problèmes sur les grandeurs pour découvrir toute la géométrie



[Extrait du site de l'Académie des Sciences sur le tricentenaire de Clairaut](#)

Objectif :

construire toute la géométrie plane à partir du problème de la mesure des terrains, et la géométrie dans l'espace à partir de la mesure des solides.

Contrainte : partir de la géométrie naturelle, compréhensible par les « commençants »

Elémens de géométrie (1741), d'Alexis Clairaut

PREMIERE PARTIE (pages 1 à 72)

Des moyens qu'il était le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des Terrains.

DEUXIEME PARTIE (pages 73 à 102)

De la méthode géométrique de comparer des figures rectilignes.

TROISIEME PARTIE (pages 103 à 144)

De la mesure des figures circulaires et de leurs propriétés.

QUATRIEME PARTIE (pages 145 à 215)

De la manière de mesurer les solides et leurs surfaces

La place des grandeurs dans la vie des hommes

L'oubli de la notion de grandeur ferme les mathématiques sur elles-mêmes. En sens inverse, l'exploration de l'univers des grandeurs constitue le point de départ de l'exploration mathématique de la diversité du monde. L'introduction mathématique au monde qui nous entoure suppose donc prise de contact et familiarisation avec l'univers des grandeurs.

(Chevallard, Bosch, 2002)

Nos choix

- 1) Ne pas séparer l'apprentissage des grandeurs géométriques de celui de la géométrie
- 2) Faire de la géométrie à partir de l'étude des grandeurs

Les conséquences

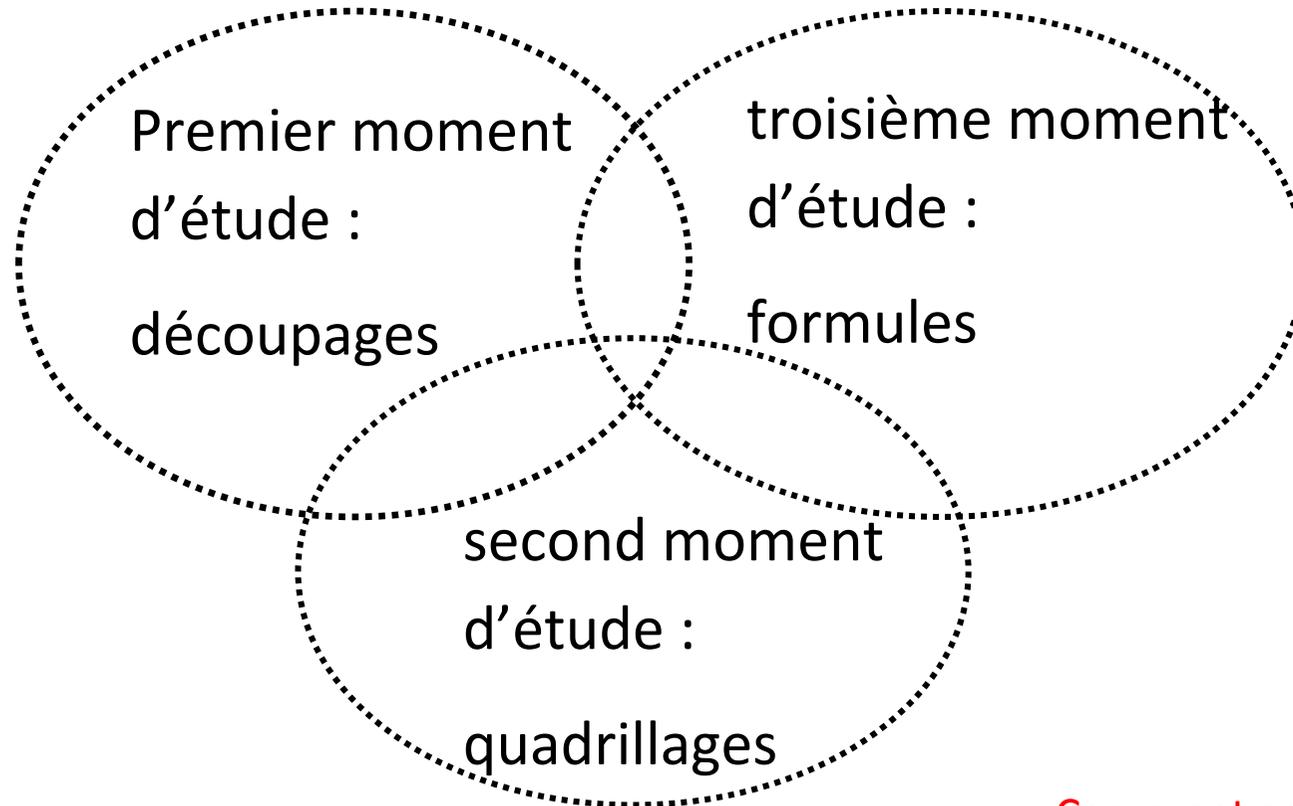
- 1) Un apprentissage conjoint des 3 parties du programme
- 2) Un apprentissage progressif
- 3) Un apprentissage ouvert sur le monde et sur les autres disciplines
- 4) Un apprentissage de la mathématisation

Notre mise en œuvre au cycle 3 de l'apprentissage de la géométrie

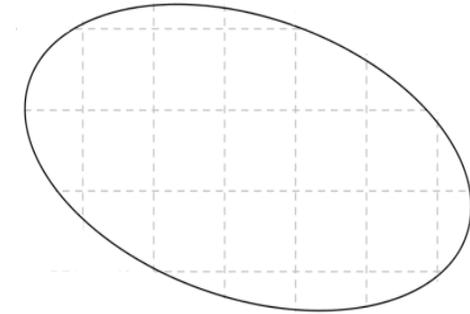
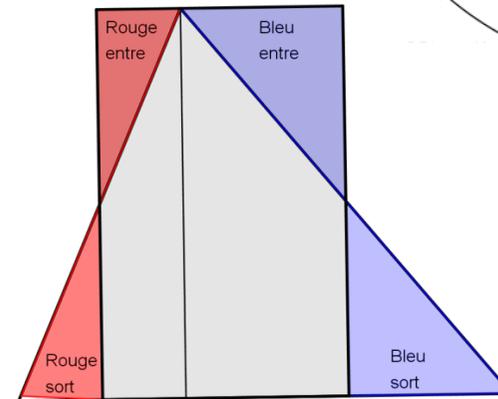
- Pour chaque chapitre : 4 questions (comparer, partager, mesurer, calculer)
- Pour chaque année :

	Comparer	Partager	Mesurer	Calculer
Aires	CM1, CM2 et 6 ^{ème}			
Volumes	CM1, CM2		CM1, CM2, 6 ^{ème}	6 ^{ème}
Angles	CM1, CM2		6 ^{ème}	Cycle 4
Longueurs	Cycle 2		Cycle 3	Cycle 3

Les aires

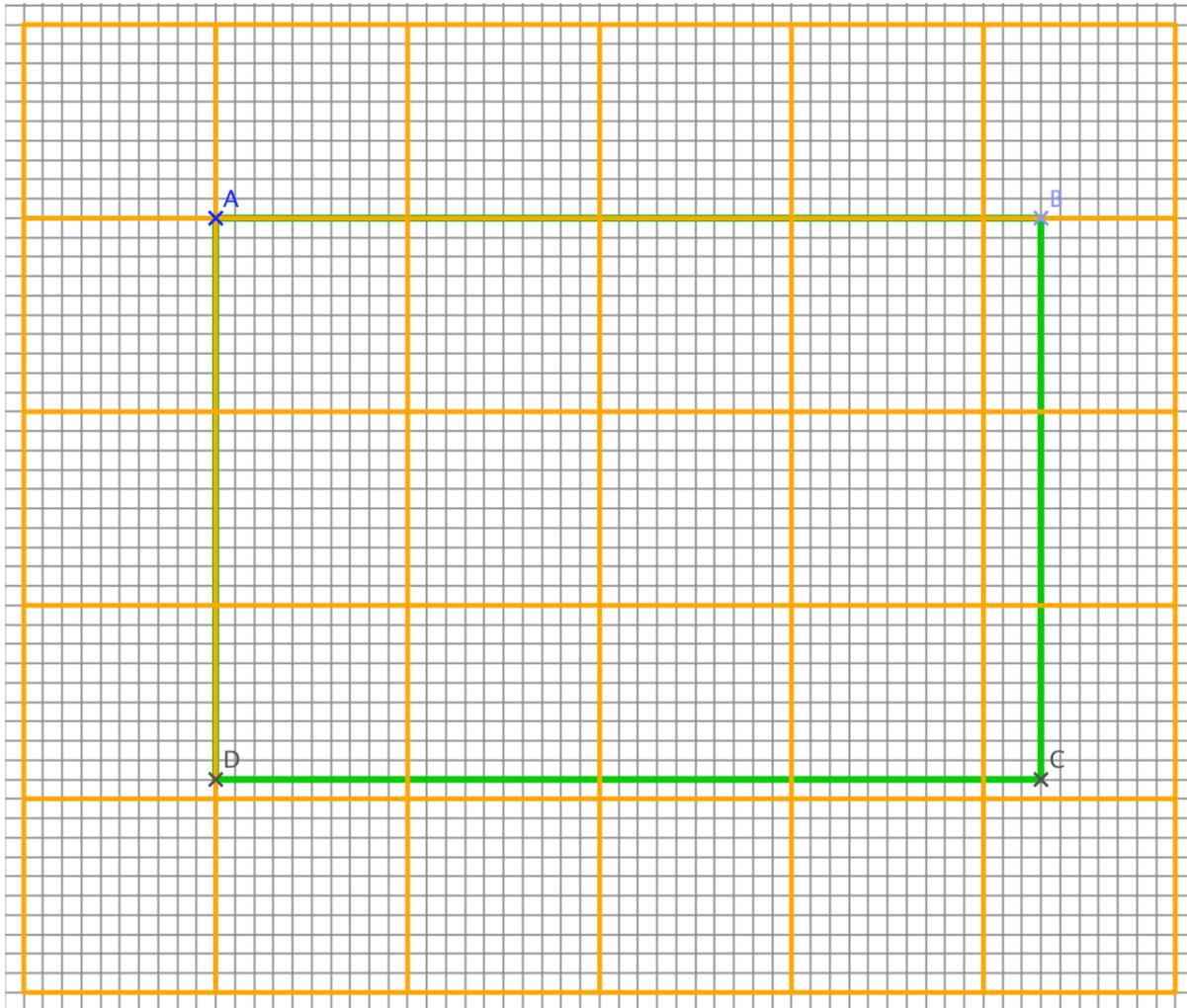


Comment comparer des aires ?
Comment mesurer une aire ?
Comment calculer une aire ?



Décompositions chinoises

Aire du rectangle



Texte

En utilisant la méthode de Kasayuki ou de Ohashi, donne une valeur assez précise de l'aire d'un cercle de 10 cm de diamètre.

Approximation de l'aire du cercle



En utilisant la méthode de Kasayuki ou de Ohashi, donne une valeur assez précise de l'aire d'un cercle de 10 cm de diamètre.

Sawaguchi Kazayuki (1670)

Machinag Ohashi (1687)

Une solution correcte, mais pas celle demandée (relis le texte)
 → Il faut soigner davantage le travail.

aire totale : 73,5 cm² environ.

- J'ai fait un carbillage avec la règle graduée de 1 cm de côté mal dit. (en cm² ou en carrés de 1 cm de côté).

Explique comment tu as trouvé 73,5 cm². (pourquoi 59 points verts?)

Port des minimes, La Rochelle

Situation : La Rochelle vs Ile de Ré



Conclusion

Démarche en cycle 3 peut-être élargie en cycles 2 et 4

Les mathématiques ont pour objet de mesurer, ou plutôt de comparer les grandeurs.

(Bossut, 1784)

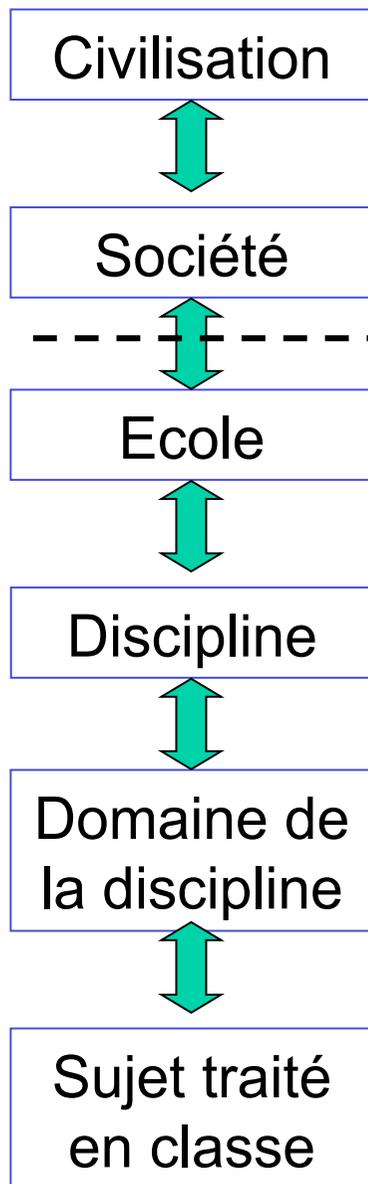
Il faut donc de toute nécessité être en possession de la notion d'aire avant de calculer des aires.

(Lebesgue, La mesure des grandeurs, 1935)

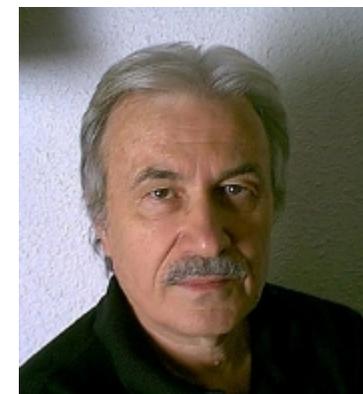
Il faut qu'en plus de la définition du nombre, c'est-à-dire de la mesure des longueurs, on traite d'autres mesures pour faire sentir l'extraordinaire précision qu'apporte le nombre dans les questions où on l'emploie.

(Lebesgue, La mesure des grandeurs, 1935)

Annexes



« Ce n'est pas la société qui se sépare de l'école mais l'école qui se sépare de la société ».



Les sujets traités en classe sont-ils pour les élèves, le système éducatif et les citoyens, reliés aux sociétés actuelles ou à notre civilisation ?

Un tableau bien sombre... mais !

- Autrement dit, les savoirs enseignés semblent purement scolaires et ne semblent utiles qu'à réussir scolairement.
- Le système éducatif dans son ensemble s'aperçoit que l'école dysfonctionne.
- L'institution crée des « activités » ou des structures où les élèves vont rencontrer la « vraie » société ou la civilisation :
 - IDD, TPE, MPS, AP, EPI ...
 - Sorties scolaires, sécurité routière (ASSR), forum des métiers, éducation à ...

**Notre salut : poser aux
élèves des QFPG
qui doivent engendrer
des PER avec des AER !**



Notre démarche dans les cycles

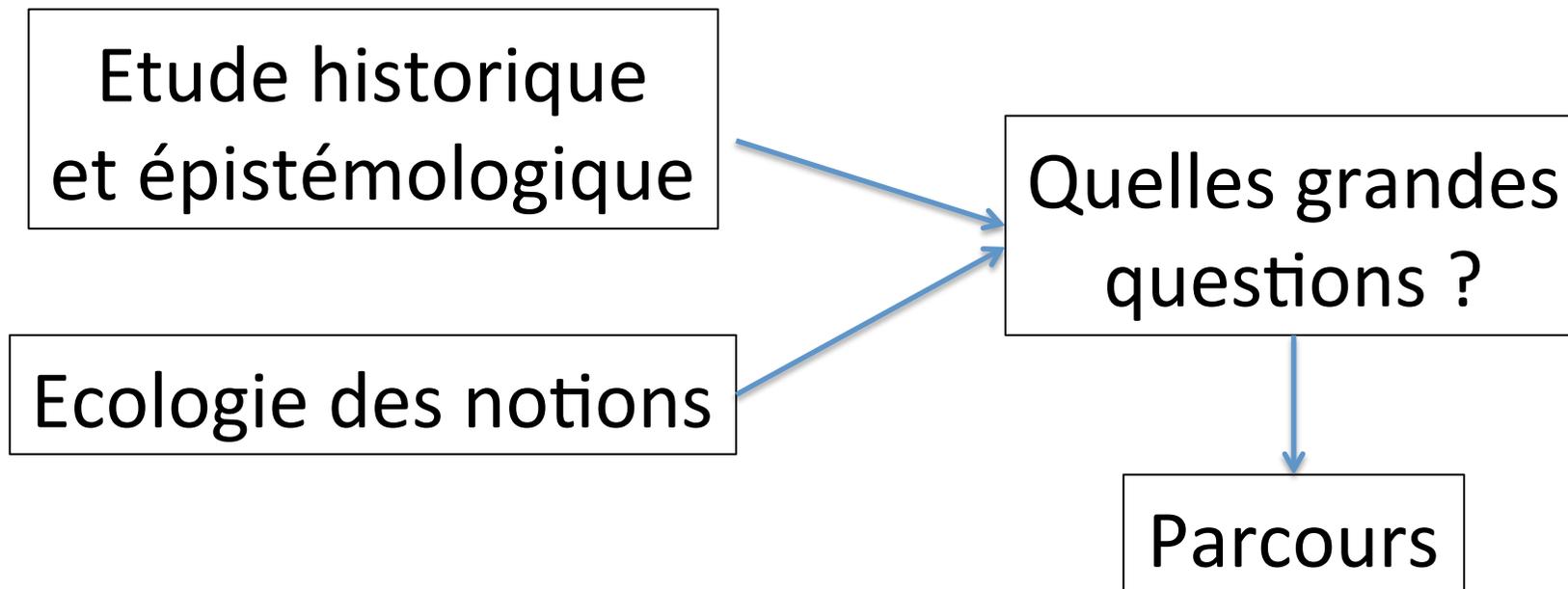
Les mathématiques ont pour objet de mesurer, ou plutôt de comparer les grandeurs ; par exemple les distances, les surfaces, les vitesses, etc. (Bossut, 1784)

L'oubli de la notion de grandeur ferme les mathématiques sur elles-mêmes. En sens inverse, l'exploration de l'univers des grandeurs constitue le point de départ de l'exploration mathématique de la diversité du monde. L'introduction mathématique au monde qui nous entoure suppose donc prise de contact et familiarisation avec l'univers des grandeurs. (Chevallard, Bosch, 2002)

Notre démarche : **motiver** et **structurer** cet enseignement

De la théorie à la pratique

- Organiser son enseignement autour de **grandes questions (QFPG)**





Chaque chapitre propose un parcours qui construit et étudie la notion de grandeur selon une organisation cohérente (comparaison absolue et relative, mesure, aspect fonctionnel). Ce parcours prétend répondre à une question de départ, en mettant en évidence les connaissances du programme au moment opportun.

Les problèmes étudiés sont tirés de situations concrètes rendant vivantes les mathématiques utilisées.

À partir de quelques grandes questions en lien avec la vie des hommes, nous organisons un parcours où l'étude de ces questions amène à construire les savoirs et techniques au programme comme réponse à ces questions. Cette démarche, que nous proposons, est intégrative des compétences du programme qui retrouvent ainsi une place naturelle qui leur donne du sens. Pour la mettre en œuvre dans la classe, nous avons élaboré **une banque de situations** pour chacune des parties qui structure l'étude de la grandeur ; cette banque nous sert de ressources pour choisir nos activités d'étude, nos exercices et les sujets de nos devoirs. À partir de cette banque, chacun de nous personnalise le parcours du chapitre qu'il va proposer à ses élèves.



Histoire et épistémologie



Ecologie des notions



Grandeurs et grandes questions



Approche de l'IREM par les grandeurs autour de grandes questions

CM1	1. Comment s'approprier la grandeur ?	
CM2	2. Comment appréhender la grandeur ?	
6 ^{ème}	1. Comment comparer des grandeurs ? (comparaison absolue et relative) 2. Comment additionner et soustraire des grandeurs ? 3. Comment multiplier et diviser ? 4. Comment mesurer ? 5. Comment calculer une grandeur ?	Cycle 3
5 ^{ème}	1. Comment comparer ?	Cycle 4
	2. Comment partager ?	
4 ^{ème}	3. Comment mesurer ? 4. Comment calculer ?	
	5. Comment varie la grandeur ?	
	6. Comment se repérer ?	
3 ^{ème}	7. Comment dénombrer ? 8. Comment construire une figure, un objet ?	

