Quel enseignement pour préparer les apprenants à la modélisation mathématique ?

Pierre Job (ICHEC Brussels management School, Ladichec, Ladimath)
Maggy Schneider (Université de Liège, Ladimath)

Rencontres autour de la compétence « Modéliser » en mathématiques

Commission inter-IREM Didactique
Poitiers, 25-26 mai 2023

ICHEC
BRUSSELS MANAGEMENT SCHOOL

Introduction

Introduction

- Un certain entendement des **compétences transversales** liées « **Résolution de problèmes** » et « **Modélisation** » est en **contradiction** avec l'**épistémologie** des mathématiques.
- En même temps, cet entendement place les **enseignants** face à une véritable **injonction paradoxale**, qui **compromet** le **travail** des **élèves** en matière de « Résolution de problèmes » et de « Modélisation.
- Commençons par ce **2^{e} aspect**.

Introduction

- Schneider (2006a) relate l'épisode suivant se déroulant dans le cadre d'une **formation** d'**enseignants** de mathématiques au niveau « **collège** ».
- Ceux-ci doivent **préparer** leurs **élèves** à gérer des suites de **nombres figurés** (*patterns*) comme on en trouve dans les **évaluations PISA** et avouent que, eux-mêmes, sont **mal à l'aise** dans la gestion de tels « problèmes ».
- Les formateurs leur enseignent des **suites** mathématiques de base dont les **progressions arithmétiques** et **géométriques**.
- Reconnaissant être plus à l'aise suite à cet enseignement, les **enseignants refusent** cependant d'envisager de **former pareillement** leurs **élèves** car, disent-ils :

« Si nous faisons la même chose avec nos élèves, ce ne sera plus pour eux de la résolution de problèmes. Or, c'est à cela que nous devons les former ».

Introduction

- C'est que le **mot d'ordre** en vigueur dans l'**idéologie** des **compétences** est de **préparer** les **élèves** à gérer le *caractère « **inédit** » et « **complexe** »* des **problèmes** pour en faire de futurs « ***citoyens responsables*** ».
- **Malgré** les **critiques** vis-à-vis de cette **idéologie**, ce mot d'ordre **demeure** dans l'**importance** accordée aux évaluations **PISA.**
- **Analysons** en quoi cela est incompatible (1er aspect) avec l'**épistémologie** des **mathématiques**, tout particulièrement en ce qui concerne la **modélisation**.

Les compétences transversales « résolution de problèmes » et « modélisation » dans les évaluations PISA

Les compétences « résolution de problèmes » et « modélisation » dans les évaluations PISA

- Les évaluations internationales **PISA**, pilotées par l'**OCDE**, sont menées tous les 3 ans, pour initier la réflexion.
  - **PISA : Programme International pour le Suivi des Acquis des élèves**
  - **OCDE : Organisation de Coopération et de Développement Economiques**

Les compétences « résolution de problèmes » et « modélisation » dans les évaluations PISA

Les évaluations PISA sont présentées comme une invitation à :

- « **Préparer** les **élèves** à la **résolution de problèmes**. » (SGPSE*, s.d.)
- « […] **confronte**[r] principalement les **élèves** à des **problèmes ancrés** dans le **monde réel** » (SGPSE, s.d.)
- « Des problèmes qu’ils **seront susceptibles** de **gérer**, collectivement ou individuellement, en tant que **citoyens** ou **professionnels** adultes » (Van Dieren , 2005)

Dimension d’**authenticité** et caractère « **concret** » des problèmes

- **Authenticité contestée** e.a. par Matheron (2012) et Bart & Daunay (2016).

* Service général du pilotage du système éducatif

Les compétences « résolution de problèmes » et « modélisation » dans les évaluations PISA

- **Annonce intéressante** dans le contexte de la Belgique francophone (BF), car PISA est porteur d'un **point de vue particulier** sur les **systèmes éducatifs**, qui entre en **résonnance** avec le **cadrage politique** adopté en BF.
- En effet…

Les compétences « résolution de problèmes » et « modélisation » dans les évaluations PISA

- La « Résolution de problèmes » fait partie des **compétences transversales fondamentales** à développer et à évaluer à l'école, pour **former** des « **citoyens responsables** ».
- Et…
- « PISA porte **davantage** sur la maîtrise des **compétences** que sur l'**acquisition** de **savoirs** et de **contenus scolaires**. » (SGPSE, s.d.).

Les compétences « résolution de problèmes » et « modélisation » dans les évaluations PISA

- Ce n'est **pas un hasard** car **PISA impacte** les **décisions** prises par le **politique** pour **piloter** le **système éducatif** de la BF.
  - En **2000**, **10^{e}** position des pays de l'OCDE avec **520 pts**.
  - En **2018**, **15^{e}** position des pays de l'OCDE avec **508 pts**.

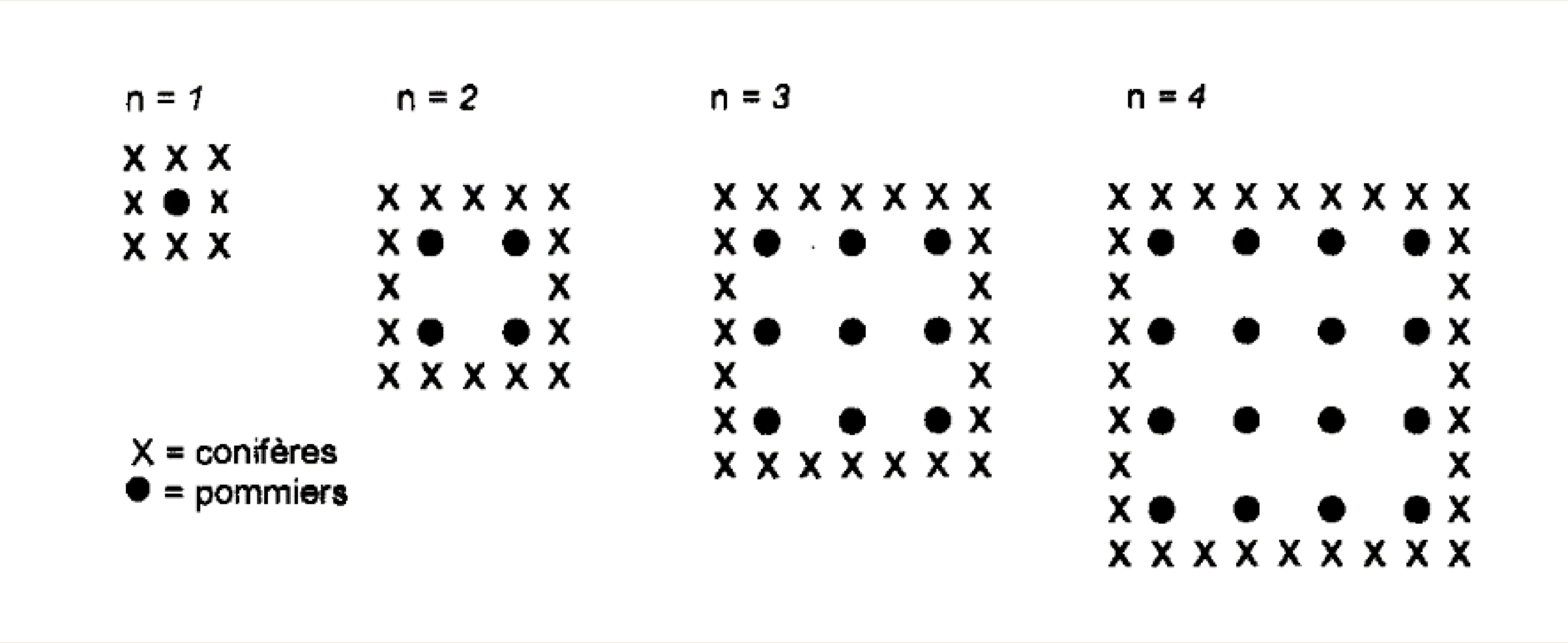
Les compétences « résolution de problèmes » et « modélisation » dans les évaluations PISA

- **Analysons** l’**item des pommiers** (tiré de PISA 2000) pour mettre en **lumière** en quoi la **compétence transversale** « **résolution de problème** » est **problématique** et, parallèlement, en quoi l’**arrière-plan** dans lequel s’insère **PISA** est lui aussi **problématique** s’agissant de la **modélisation** et des **savoirs**.
- Voici l’**énoncé** de l’**item**, adapté pour les besoins de l’exposé (souci de concision).

Les compétences « résolution de problèmes » et « modélisation » dans les évaluations PISA

- « Un **fermier** plante des **pommiers** en **carré**. Afin de **protéger** ces arbres contre le **vent**, il plante des **conifères** tout **autour** du verger. Vous pouvez voir ci-dessous un **schéma** présentant cette situation, avec la **disposition** des **pommiers** et des **conifères** pour un nombre () de **rangées** de **pommiers**. »

Les compétences « résolution de problèmes » et « modélisation » dans les évaluations PISA



Les compétences « résolution de problèmes » et « modélisation » dans les évaluations PISA

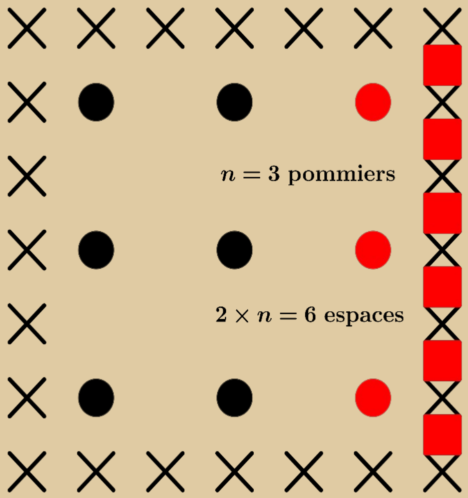
- Les élèves doivent **déterminer** le **nombre** de **pommiers** et de **conifères à l'étape** .
- Comment peuvent-ils procéder ?
- **Analyse**, par **effet de contraste**, tirée de Schneider et al. (2016), de **deux types de résolutions** :
  - **Résolution 1 (« astucieuse »)**
  - **Résolution 2 (par catégorisation de problèmes)**

Les compétences « résolution de problèmes » et « modélisation » dans les évaluations PISA

- **Résolution 1 (« astucieuse »).**
- La **formule** des **pommiers** n'est **pas problématique**.
- Pour celle des **conifères**, une **résolution** « **astucieuse** » peut-être envisagée, comme celle décrite ci-après .

Les compétences « résolution de problèmes » et « modélisation » dans les évaluations PISA

- *« **Nombre** de **conifères** : les choses se corsent…combien le long d'un côté ? Le nombre de conifères correspond au nombre de pommiers [3], plus 2 conifères de coin, plus un dans l'espace entre chaque pommiers, donc plus [2]… [7] conifères… x 4 ! Non, car les conifères de coins seraient comptés deux fois… [7] conifères fois 2 (en-haut et en-bas) plus [1,2,3,4,5] fois 2… donc [14 + 10],… [24] conifères ».*
- **Illustration** pour n = 3



Les compétences « résolution de problèmes » et « modélisation » dans les évaluations PISA

Plus **généralement**, on se base sur :

- Une **comparaison** entre **rangée** de **pommes** et rangée correspondante de **conifères**.
- Le fait qu’il y a **4 côtés**.
- Mais qu’il ne faut **pas compter plusieurs** fois les **conifères** aux **coins** du carré.
- Cela conduit à

- **conifères** au **total**.

PISA pour évaluer la compétence transversale « résolution de problèmes » ?

- **Résolution 2 (par catégorisation de problèmes).**
- Plaçons-nous dans le **contexte** où les **élèves** ont reçu un **enseignement de modèles fonctionnels** de base (**suites arithmétiques** et **géométriques**).
- C’est **possible** dès 12 ans (Krysinska & al., 2010) notamment via l’étude des **nombres figurés**.
  - Nous y reviendrons.

PISA pour évaluer la compétence transversale « résolution de problèmes » ?

- Les élèves disposent de **critères** de **reconnaissance** : **addition/multiplication répétée**.
- Dans ce contexte, la résolution consiste à **déterminer** si un des **modèles connus** est **applicable** à l'item.
- Les élèves peuvent **identifier** l'**addition répétée** (, , 24) qui conduit à .
- Cet **enseignement préalable** (**modélisation fonctionnelle**) permet de **trivialiser**, ou presque, la **résolution** de certaines classes de **problèmes**.

PISA pour évaluer la compétence transversale « résolution de problèmes » ?

- **Contraste** entre les résolutions 1 et 2.
- Selon l'enseignement reçu, la **résolution** d'un item PISA ou, de manière générale, d'un problème, peut être employée pour **évaluer** le **talent personnel** d'un élève ou pour **évaluer** sa **capacité** à faire **usage** de **savoirs** et **modèles** auxquels il est **acculturé**.

PISA pour évaluer la compétence transversale « résolution de problèmes » ?

- Les **notions** de **problèmes**, de **résolution** de **problèmes** et d'**évaluation** des **compétences transversales** « **résolution de problèmes** » et « **modélisation** » ne sont donc **pas transparentes**.
- Elles **nécessitent** d'être **explicitées** et de poser des **choix argumentés** qui relèvent à la fois de l'**articulation cohérente** avec l'**épistémologie** de la discipline (que l'on va décrire après) et avec les **valeurs** qu'on souhaite véhiculer au travers d'un **enseignement**.

L'économie de pensée comme épistémologie des mathématiques

Les mathématiques comme économie de pensée

- La **mise** en **arrière-plan** des **savoirs** au **profit** notamment de l'**évaluation** des **compétences transversales**, comme prôné dans **PISA** et **avalisé** par le service général du **pilotage** du **système éducatif**, nous apparait **inacceptable** au **plan épistémologique**.
- Une **caractéristique** épistémologique forte des **savoirs** et des **modèles mathématiques** est justement située dans l'**économie** de **pensée** qu'ils autorisent.
- Ces **savoirs** permettent le **développement** de **modèles unificateurs** applicables à la **plus grande variété possible** de **problèmes**, problèmes initialement considérés comme disjoints, offrant ainsi l'**opportunité** de **développer** des **techniques** de **résolution générales** et **instrumentales**.

Les mathématiques comme économie de pensée

L'**analyse** et ses concepts **illustrent** à merveille cette **économie de pensée** :

- La quadrature de la parabole, le volume du cône, celui de la pyramide et celui de la sphère sont des **problèmes** a priori **différents** mais ils peuvent être **regroupés** en **un seul modèle** : l'**intégrale définie** dont l'**intégrand** est une **fonction** du **second degré**.
- Bourbaki (1969) à propos de l'œuvre d'Archimède : *« […] pour qu'on ait le droit de voir là un" calcul intégral", il faudrait y mettre en évidence, à travers la* ***multiplicité*** *des* ***apparences géométriques****, quelque ébauche de* ***classification*** *des* ***problèmes*** *suivant la* ***nature*** *de " l'****intégrale****" sous-jacente. Au XVII^{e} siècle, nous allons le voir, la* ***recherche*** *d'une telle* ***classification*** *devient peu à peu l'un des* ***principaux soucis*** *des* ***géomètres****. »*

Les mathématiques comme économie de pensée

Un autre exemple phare est celui de l'**algèbre** et de ses interactions avec la **géométrie**.

- **Avant Descartes**, chaque **problème** de **géométrie synthétique** euclidienne constituait une **mise** à l'**épreuve** du **talent** de la **personne** qui s'y frottait.
- L'**algébrisation** de la géométrie offerte par **Descartes** (XVII^{e}) a **permis** de mettre à la **portée** du **plus grand nombre** la **résolution** de tels **problèmes géométriques** grâce à la **géométrie analytique** classique.

Les mathématiques comme économie de pensée

- L’histoire ne s’arrêt pas là.
- L’algébrisation de la géométrie va de pair avec la **géométrisation** des **mathématiques** pour constituer une **dialectique** fondamentale de **modélisation** réciproque entre **algèbre** et **géométrie** (Dunia, 2015).
- Les propos de **Dieudonné** (cité dans Bkouche (1986), p. 489) vont dans ce sens :

Les mathématiques comme économie de pensée

- « […] la **linéarisation** de la **géométrie** permet en retour une **géométrisation** du **linéaire** et par cela même une **géométrisation** des divers **domaines** de la connaissance où **intervient** le **linéaire**. […] C’est la **prise** de **conscience** par les mathématiciens d’un **caractère commun** à ces divers **domaines** qui a conduit à l’**algèbre linéaire** telle que nous la connaissons aujourd’hui, **construction unificatrice** qui continue l’idéal d’une **méthode universelle** que l’on retrouve tout au long de l’histoire des mathématiques ; la représentation géométrique de l’algèbre linéaire issue de la représentation linéaire de la géométrie […] a conduit alors à cette **géométrisation universelle**, nouveau **principe unificateur** induisant les **transferts** d’**intuition** […] qui sont **autant** que la **puissance** du **raisonnement formel**, l’un des **aspects** du **développement** des **mathématiques contemporaines** […] »

Les mathématiques comme économie de pensée

- Cette **dialectique** entre algèbre et géométrie a permis le développement de **modèles** toujours plus performant : de la **géométrie analytique** classique au **formalisme bipoint** en passant par la **géométrie vectorielle** (Nguyen & Schneider, 2016).
- De ce point de vue, les **mathématiques** constituent une **entreprise démocratique** de **mise à disposition** au **plus grand nombre**, de **modèles** et **savoirs instrumentaux**.

Les mathématiques comme économie de pensée

- Pour le dire encore plus fortement, la **démarche** du **mathématicien** ne consiste pas à « simplement » résoudre des problèmes épars, mais à littéralement **tuer** des **classes entières** de **problèmes**, à l'aide de **modèles unificateurs**, basés sur des **savoirs** conçus à cet effet, modèles qui sont de nature à faire ressortir les **traits communs** de ces problèmes permettant de les **déproblématiser**.
- Voilà comment nous situons l'**économie de pensée** des mathématiques en **lien** avec la **modélisation**.
- Nous envisageons la notion de **situation fondamentale** comme une **modélisation** (**didactique**) de l'économie de pensée.
- Il s'agit de construire des **classes** de **problèmes** par modélisation qui caractérisent un savoir en mettant en relief cette économie de pensée.
- **Rem.** Nous distinguons (fortement) situation fondamentale et caractère **adidactique** d'une situation.

Les mathématiques comme économie de pensée

- Alors, devrait-on **renoncer** à l'instrumentalité des **modèles** et **savoirs** mathématiques dont l'**algébrisation** de la géométrie et la **géométrisation** des mathématiques , au **motif** de permettre l'**évaluation** « pure » de la **compétence « résolution de problème** » dans sa dimension **transversale** ?
- Cela nous apparait **absurde** et constituer une **régression** par rapport aux **millénaires** qui ont été nécessaires pour que les **esprits** les plus **brillants** de leur temps **développent** des **modèles** et **savoirs** **instrumentaux** à **vaste portée**.

Les mathématiques comme économie de pensée

- La **transversalité** des **compétences** « **modélisation** » et « **résolution de problèmes** » peut donc être considérée dans le cadre d'un **entraînement** à **constituer** (par **modélisation**) et **brasser** des **classes** de **problèmes** toujours **plus vastes**, et à développer les moyens d'**identifier** à quelle classe appartient une instance donnée, ainsi que la ou les **techniques associées** pour résoudre ces problèmes (Schneider, 2006b).
- Mais cela suppose des **enseignements préalables** adaptés, comme nous allons l'illustrer.

La modélisation fonctionnelle génératrice de nombreux apprentissages Une vue panoramique

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- La **modélisation fonctionnelle** est susceptible de fournir un **cadre**, couvrant l'enseignement secondaire et au-delà (Job & al., 2023), pour la constitution de ces **classes** de **problèmes**.
- Les classes de problèmes sont constituées à partir de **classes** de **fonctions paramétrées** qui en constituent autant de **modèles**.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- Cette modélisation fonctionnelle est également susceptible de servir de **véhicule** à l'**enseignement** de l'**algèbre** qui apparait alors comme **émergeant** de **pratiques** de **modélisation**.
- Cette idée est **proche** du point de vue adopté par Bosch et Gascon (Bolea & al., 2001) pour qui l'**algèbre** est une **organisation mathématique** au **service** des **autres**.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- Plus généralement la **modélisation** (fonctionnelle ou non) offre une série d'**opportunités** dans les directions suivantes. Nous y reviendrons dans la seconde partie.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- **Opportunité 1. Travailler** et faire prendre **conscience** de la **dimension intra-mathématique** des savoirs mathématiques et de la modélisation.
  - La modélisation **intra-mathématique** constitue le **parent pauvre** de l'enseignement **secondaire** en **BF.**
  - Le **focus** est souvent **réduit** à la dimension **extra-mathématique** en partie sous l'impulsion de l'idéologie des compétences dites transversales.
  - Mais aussi par **manque** de **formation** des **enseignants** qui envisagent difficilement la dimension **intra-mathématique** **autrement** que par l'entremise d'une **théorie déductive** déjà constituée.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

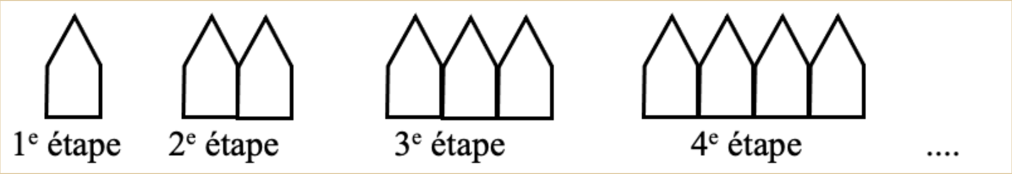
- **Opportunité 2.** Travailler la dimension intra-mathématiques passe, en particulier, par le **travail** de la **dialectique** de modélisation réciproque entre **algèbre** et **géométrie** (Lebeau & Schneider, 2009 ; Dunia, 2014).
- **Opportunité 3. Confronter** le **rapport positiviste empirique** dont on sait qu'il constitue un **obstacle épistémologique majeur** (Job & Schneider, 2015) en amenant les élèves à **articuler** les dimensions **intra** et **extra**-mathématiques (voir exemples 1 et 2 plus loin).

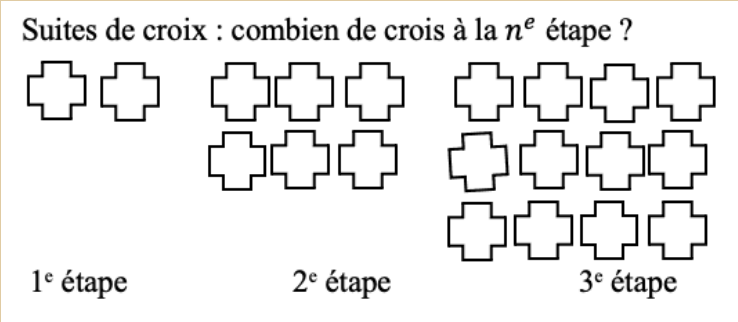
Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- Dans ce qui suit, nous proposons une **vue panoramique** (et donc allusive) d’un **parcours,** découpé pour les besoins de l’exposé en **épisodes,** qui **couvre** les 6 années du **secondaire** en BF (12-18 ans) et prend appui sur la **modélisation fonctionnelle**.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

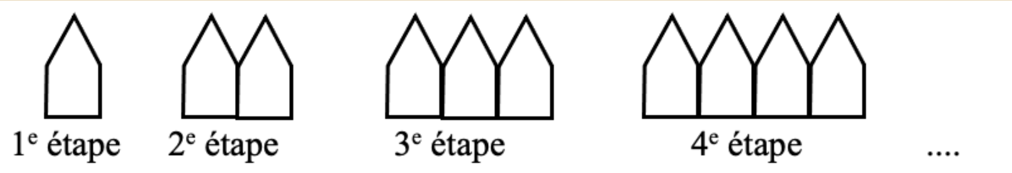
- **Épisode.**
- Dès la **1er année** du secondaire (12-13 ans) l'étude de **suites figurées** permet de faire émerger les premiers **modèles fonctionnels** au travers d'une série de questions(Krysinska & Schneider, 2010).
  - Nombre d'objets à une étape éloignée ?
  - Nombre d'objets à n'importe quelle étape ?
  - Numéro d'étape à laquelle on a un nombre donné d'objets ?
  - …





Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

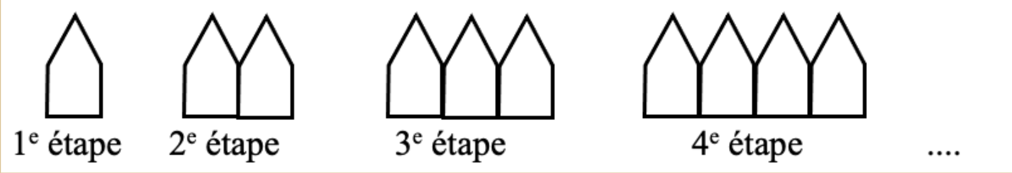
- Les suites sont choisies pour permettre **différentes modélisations** que les élèves expriment sous forme **pré-algébrique**.



- Ces modèles pré-algébriques constituent une **première rencontre** avec les **fonctions** (dans ce parcours).
  - Calcul d'une image pour un point donné et réciproquement d'un point d'image donnée.
  - Dans les programmes, la rencontre est prévue en 3e vers (14-15 ans).
- La question de l'**équivalence** des modèles et de leur **instrumentalité** est posée.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- Ces modèles sont **équivalents** du point de vue de la **dénotation « géométrique »**.
- La question de l'équivalence peut aussi être traitée dans le **registre numérique** en considérant les modèles comme autant de « **programmes de calcul** » (Chevallard, 2005) : les résultats de ces programmes sont comparés pour différentes valeurs numériques.
- Ces deux équivalences conduisent à accepter les **premières règles** de **calcul algébrique** et légitime l'**utilisation** de **lettres** comme économie d'écriture :
    - , ,
    - …



Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- En **croisant** ces différents **niveaux** de **rationalité**, les **règles algébriques** non « conformes » peuvent être **falsifiées** et le **contexte** du problème rend **plausibles** et/ou **intelligibles** les autres (certaines règles rendent compte de propriétés du **calcul** des **grandeurs** telle la **distributivité**).
- Les **règles** initialement adoptées pour des raisons pragmatiques **deviennent** peu à peu le **niveau** de **rationalité privilégié** permettant de **transformer** un **modèle** en un autre **équivalence** afin de proposer une **mise** en **forme** facilitant la **réponse** aux questions posées.
  - Les élèves sont notamment conduit à **résoudre** leur premières **(in)équations** et à **rédiger** leurs premières **démonstrations algébriques** en faisant usage d'**identités**.
  - Le **recours** à la **dénotation** et/ou au **programme** de **calcul** reste **disponible**.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- L'**organisation** d'une telle **transition** entre différents **niveaux** de **rationalité** peut être **théorisée** dans le **formalisme praxéologique** (Bosch & Chevallard, 1999).
- Les validations appuyées sur des **arguments hybrides** cadrent les **praxéologies** « **modélisation** »/ « **pragmatiques** » et le recours au **déductivo-algébrique** les **praxéologies** « **déduction** » (Schneider 2011).

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- Pour le dire rapidement…
- Les **praxéologies** « **modélisation** »/ « **pragmatiques** » sont centrées sur la composante **technologique** dans ses différentes dimensions justificatives (rendre intelligible, convaincre…)
- Les **praxéologies** « **déduction** » sont quant à elle centrées sur la **théorie** en un sens plus usuel.
- Cependant…
- Ces deux types de praxéologies constituent une **modélisation** (**didactique** cette fois) du cycle de la **modélisation mathématique** qui envisage la constitution d'un modèle théorique déductif intra-mathématique au départ de modèles constitués de manière plus pragmatiques à partir de problèmes intra ou extra-mathématiques.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- C'est l'**articulation** entre les deux niveaux praxéologiques qui donne **sens** au **modèle théorique déductif** : le déductif peut prendre le pas sur le pragmatique lorsque les **élèves** ont suffisamment **éprouvé** les **limites** du **pragmatique**, l'**ergonomie** propre au **déductif** et le fait que le pragmatique, même s'il est initialement premier, ne peut faire l'économie d'un **questionnement** sur les **ressorts internes** qui le constitue et **donc** de la dimension **intra**.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- L'**économie de pensée** est donc localisée en un sens plus « commun » au niveau des classes paramétrées mais aussi et de manière tout aussi importante au niveau **macroscopique** de la **globalité** du **cycle** de la **modélisation** tel que théorisé ici.
- Ceci met en avant la question de la **mémoire** dans le traitement didactique de la « compétence modélisation » et de la nature des savoirs mathématiques.
- Dans notre perspective le **cycle complet** de la **modélisation** constitue un **savoir-mémoire global** et **collectif** au sein duquel les problèmes et savoirs prennent sens.
- Nous renvoyons à Matheron (2009) pour une étude approfondie de cette thématique.
- Terminons cette parenthèse plus théorique et poursuivons avec…

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- La considération de nouvelles suites d'objets permet d'**amener** les **élèves** à **classer** les **suites** en fonction des **modèles** qui permettent d'en rendre compte.
- L'**introduction** de **paramètres** permet de **réduire** la classification à **deux modèles** exprimés par les ostensifs et .
- Ces **modèles unifiés** permettent de réaliser une **économie** de **pensée** substantielle.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- Les **connaissances** obtenues à partir du travail sur un **modèle paramétré** sont **valables** pour toutes les **instances** où il s’applique.
- On résout ainsi d’un **seul coup** non pas un seul problème, mais **plusieurs**.
- C’est une raison pour **remplacer** l’étude des **fonctions**, une par une, par celle de **classes** de **fonctions paramétrées**.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- L’émergence de **modèles fonctionnels paramétrés modifie** la **nature** de l’**activité mathématique** des élèves.
- Ils disposent à présent de la possibilité, **face** à un **problème**, de **déterminer** si un des **modèles** est ou non **applicable**, ce qui suppose d’avoir **développé** des **critères** d’**identification** propres à chaque modèle.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- Une telle identification ne pose pas problème car les élèves disposent de la possibilité d'une **double lecture**, **itérative** et **fonctionnelle**, validée par la définition du produit comme **addition répétée** et de la puissance comme **multiplication répétée**.
- Le **paramétrage** apparait alors comme une **marge** de **liberté**´qui permet de tenir compte des **spécificités** du **problème traité**.
- **Remarque.** Dans les **programmes**, les **suites arithmétiques** et **géométriques** sont abordées en 5^{e}(**15-16 ans**). Les travaux de Krysinska et Schneider constituent une **mise** en **perspective** intéressante des **capacités** des **élèves**.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- **Épisode.**
- Le **choix** des **progressions arithmétiques** et **géométriques** n'est **pas anodin** et **conduit** aux **fonctions** du **1er degré** et **exponentielles** par « **densification** » des **tableaux numériques** employés dans les phases exploratoires.
- Cette « **densification** » se fait via une **dialectique** entre **numérique** et **algébrique**.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- Ainsi l'**extension** à **tous** les **points** d'une **même droite** d'une **même relation** ou le **regroupement** de **toutes** les **droites** du **plan** en un seul et **même ostensif contraint** les **règles** de calcul sur les **relatifs**.
- C'est l'**algébrique** qui **commande** ici au **numérique** puisqu'il s'agit de **prolonger** un même **calcul littéral/ostensif/modèle** des naturels aux relatifs en définissant en conséquence l'extension des opérations.
- L'**économie** de **pensée** s'exprime donc aussi à ce niveau dans l'**extension** de la **portée** d'un **modèle** fonctionnel/algébrique.
- Voir l'exemple 1 plus loin pour plus de détails.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- **Épisode.**
- L'**étude** des **progressions géométriques** est **prolongée** pour des appartenant à des **ensembles** de **plus** en plus **vastes** et conduit aux **fonctions exponentielles**.
- Extension à un entier négatif puis à un rationnel sur base de l'idée de **multiplication répété** pour **préserver** ce qui plus tard constituera une **équation fonctionnelle** .

- 2		0	1/2	1	?	2	3	4	4,6
?		1	?	2	3	2^2	2^3	2^4	?

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- L'enseignement va jusqu'à l'extension au nombres **irrationnels** via la **continuité** du **numérique** assurée par l'**axiome** des **intervalles emboîtés** (Schneider & al., 2016).
- L'extension « pragmatique » des progressions géométriques à des de nouvelles classes de nombres est **complétée/systématisée** par l'analyse de **divers contextes**.
    - **Vitesses de variation** : nombre de bactéries, variation de la température d'un corps, transformation du sucre de canne en dextrose.
    - **Échelles numériques particulières** : intensité d'un tremblement de terre, valeurs du pH comme mesure de l'acidité d'une solution.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- Cette analyse met en évidence l'intérêt de considérer des **contraintes** qui portent sur les **fonctions elles-mêmes** ce qui conduit à considérer des **équations fonctionnelles** et à s'intéresser à leur résolution :

- Ceci conduit outre la classes des fonctions **exponentielles** à celle des **fonctions logarithmes**.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

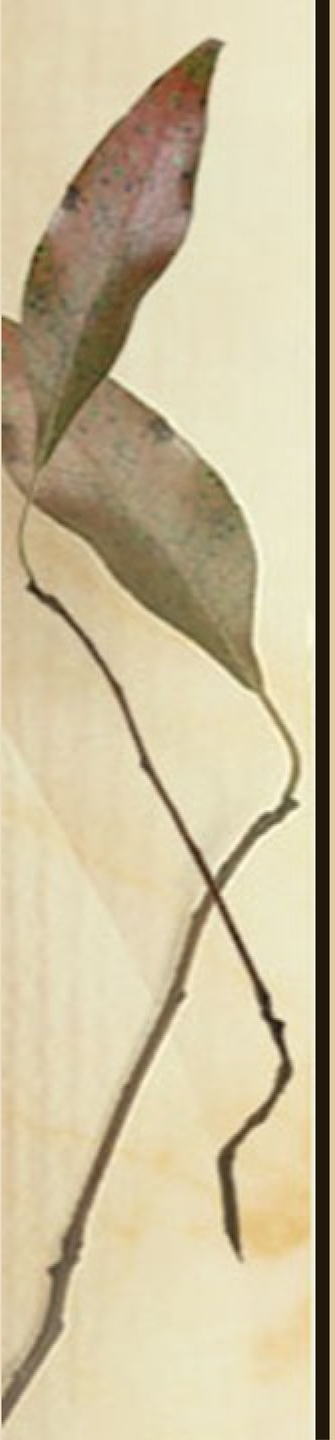
- **Épisode.**
- Similairement, la classe des **fonctions sinusoïdales** est construite comme **modèle** permettant de rendre compte de **phénomènes harmoniques** non amortis (Rosseel & Schneider, 2009)
- Le choix de la mesure « **radian** » est justifié par le souhait de pouvoir traiter des **phénomènes périodiques** aussi bien à l'**échelle macroscopique** (planétaire) que **microscopique** (électrons gravitant autour d'un noyau).

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- Les **élèves** sont **entraînés** à brasser toujours plus de classes de **fonctions paramétrées** au fur et à mesure que de nouvelles sont introduites.
- Et de même pour d'autres classes encore…
- Un tel enseignement se basant sur l'étude des fonctions regroupées en classes paramétrées et « Taillées sur mesure » pour répondre à des problématiques intra ou extra-mathématiques est détaillé dans Henrotay et al. (2015).

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- Terminons ce **panorama** rapide en soulignant les **caractéristiques** globales suivantes.
- Les **fonctions** constituent le **principal objet** d'étude.
- Elles émergent au travers d'**activités** de **modélisation**.
- « **Tout** » est « **subordonné** » aux fonctions.
  - L'algèbre émerge des activités de modélisation fonctionnelle (ce qui n'exclut pas d'autres fonctionnalités).
  - Les équations et inéquations expriment des questions qu'on se pose à propos des fonctions.
  - Les identités sont des outils de mise en forme de fonctions permettant de répondre à des besoins particuliers : p.ex. factoriser pour obtenir les racines…



Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- La « **sophistication** » des classes de fonctions considérées **résulte** des **problématiques traitées**
  - Des fonctions irrationnelles sont requises dans certains problèmes d'optimisation : minimiser le coût du transport d'un trajet dans des milieux différents (terre-mer).
- Des éléments du **formalisme ensembliste/bourbakiste** des fonctions sont introduits mais n'en constituent **pas** la **finalité** comme cela est souvent le cas dans les **classes ordinaires** ou ce formalisme **tourne à vide**.
- La **pensée fonctionnelle** existe indépendamment de ce formalisme.

Modélisation fonctionnelle : une vue panoramique

- Le « **sens** » des fonctions n'est pas localisé dans ce formalisme mais dans l'**utilisation** qui est faite de la pensée fonctionnelle pour **résoudre** des **problèmes** par **constitution** de **classes** de **fonctions paramétrées**.
- Dans cet univers, l'**acquisition** de la **notion** de **fonction** est jaugée à l'aune de la **capacité** des **élèves** à exprimer des **récits** relatant la **genèse** des différentes **classes** et leurs **propriétés** mais également à **choisir** de manière judicieuse une **technique** selon le problème posé s'il s'agit de considérer une équation, une identité, si telle lettre doit être considérée comme un paramètre ou une inconnue.
- Le **travail** de la **dénotation** est pour ainsi dire **permanent**.

Des activités de modélisation qui conduisent à interroger la dimension intra-mathématique
Deux exemples

« Moins par moins donne plus »

- Poursuivons avec **deux exemples** mettant en scène la manière dont on peut **aborder** la **dimension intra-mathématique** au travers de la **modélisation**.
    - **Exemple 1.** Comment construire et justifier la règle « moins par moins donne plus » ?
    - **Exemple 2.** Comment articuler, Thalès, vecteurs, droites et équation cartésienne ?

Exemple 1
Construction et justification de la règle « moins par moins donne plus » au travers d’une activité de modélisation

« Moins par moins donne plus »

- On sait les **difficultés** soulevées par l'**enseignement** de la **règle** « **moins par moins donne plus** » tant chez les élèves, les enseignants que les didacticiens (Vlassis, 2010) telle cette élève Alice (Berté, 1988) :

« « Moins par moins égale plus », mais moi je n'arrive pas à me représenter ça […] Je trouve que moins par moins ça fait moins ! Voilà ! […] Si je descends 4 fois 3 marches, je descends de 12 marches, non ? »

« Moins par moins donne plus »

- *Pour **Alice** car*
  - *« Je **descends** marches » donc .*
  - *« fois en **descendant** » donc .*
  - *« je **descends** de marches » donc .*
- À un **niveau mathématique** relativement **avancé**, cette règle peut se **justifier** en adoptant un **principe formel** de **permanence** (Hankel, 1867) : il s'agit d'**étendre** à des **propriétés** de (dont celle de **distributivité** de la multiplication sur l'addition).

« Moins par moins donne plus »

- Divers auteurs voient dans la nature de cette construction une **difficulté** d'appréhension de cette règle car elle demande « de s'**écarter** d'un **sens** "**concret**" attribué aux êtres numériques » (Glaeser, 1981).
- Schneider (2008) y voit une **manifestation** de **l'obstacle épistémologique** que constitue le **rapport positiviste empirique** au monde sensible.
- On mesure l'**impasse** que peut constituer l'**imposition** de travailler les **compétences** « **modélisation** » et « **résolution de problèmes** » dans le **cadre** de **pensée** sous-jacent à PISA lorsque « **concret** » est entendu en un sens **étriqué** sous l'impulsion de **visées** trop **utilitaristes**.

« Moins par moins donne plus »

- Sans prétendre à l'exclusivité, les activités visant à **unifier** le traitement de **problèmes** sous la bannière d'un même **modèle** (fonctionnel ou non) offrent une **opportunité** de **relier** le **principe** de **permanence** mis en œuvre par Hankel pour obtenir la **règle** « **moins par moins donne plus** » aux **aspirations** légitimes des **élèves** à pouvoir prendre **appui** sur quelque chose de « **concret** » à leurs yeux.

« Moins par moins donne plus »

- Brossons à **grands traits** certaines des **caractéristiques** d'une **ingénierie** (Job & al., 2014 ; Schneider & al., 2015) destinée à des élèves de 1er (12-13 ans) pour donner de la substance à cette annonce.
- Cette ingénierie faire la **part belle** à la **modélisation**.
- On demande aux **élèves** de **développer** un **modèle** reliant position, vitesse et temps.
- Plus explicitement, le **contexte** est le suivant.
- Une **voiture** se déplace à **vitesse constante** le long d'une **route** parfaitement **droite**.
- Notons
  - cette **vitesse** (en **km/h**).
  - le **temps** (en **heures**).
  - **la position** (en **km**) : la route est munie d'un **repère**.

« Moins par moins donne plus »

- On suppose que la **voiture** est **observée** à l'origine du repère au temps .
- , et peuvent **prendre** des **valeurs négatives**.
  - signifie que la voiture se déplace à une vitesse de 30 km/h dans le **sens contraire** du **repère**.
  - signifie qu'on se demande où la voiture **était il y a 2 heures**.
  - Etc.

« Moins par moins donne plus »

- **1er partie.**
- **Supposons** que la voiture se **déplace** à km/h.
- **Où** se **trouvera** la voiture dans 2 heures () ?
- La voiture se **trouvera** à km de son point de **départ** au bout des h.

« Moins par moins donne plus »

- **1er partie.**
- On a **obtenu** en faisant .
- En **expérimentant** avec d'**autres** valeurs **positives** de , on peut dresser un tableau de valeurs qui permet de **conclure** à une certaine régularité.
- La **formule** suivante exprime cette régularité ou comment obtenir à partir de et de :

« Moins par moins donne plus »

- **2e partie.**
- **Supposons** que la voiture se **déplace** à km/h.
- **Où** se **trouvait** la voiture 2 heures **avant** () ?
- La voiture se **trouvait** à km de son **point** de **départ** il y a heures.

« Moins par moins donne plus »

- **2e partie.**
- On a **obtenu** en **faisant** c'est-à-dire par rapport aux **données** de **départ**

- **Souvenez-vous** que les **élèves** ne **savent pas multiplier** des **nombres négatifs** entre eux à ce stade !

« Moins par moins donne plus »

- **2e partie.**
- En **expérimentant** avec d'**autres** valeurs **négatives** de , on peut dresser un tableau de valeurs qui permet de **conclure** à une certaine régularité.
- La **formule** suivante exprime cette régularité ou comment obtenir à partir de et de :

« Moins par moins donne plus »

- **3e partie.**
- Donc **selon** les **valeurs** de et de on doit appliquer des **formules différentes**.
- Si :
- Si :
- De manière **similaire**, on a les **formules** suivantes dans les **deux autres cas de figure**
- Si et :
- Si et :

« Moins par moins donne plus »

- **3e partie.**
- C'est **pénible** d'avoir **4 formules différentes**.
- Ne pourrait-on avoir **une seule formule** valable dans **tous les cas**, par exemple ?
- Ce serait tout de même **plus pratique**.
- La **réponse** est **positive** si on accepte d'**imposer** de **nouvelles règles** de fonctionnement à la **multiplication** impliquant des **nombres négatifs**.

« Moins par moins donne plus »

- **3e partie.**
- Pour le **moment** lorsque on a .
- Or on **voudrait** .
- Il **faut** donc que pour que ce soit **possible**.
- Mis face à l'**alternative** d'**accepter** ou de **rejeter** cette règle, les **élèves** se positionnent **en faveur** de la **règle** et privilégient l'**économie de pensée** constituée par le **modèle unique** .

« Moins par moins donne plus »

- **Quelques commentaires sur l'ingénierie.**
- **Commentaire 1.**
- L'**adoption** des **règles** de **calcul** sur les nombres **relatifs** est motivée par la **volonté** des **élèves** de conserver un **modèle unique** et ainsi **éviter** de devoir **jongler** avec **plusieurs modèles**.
- Mais **pas uniquement**…

« Moins par moins donne plus »

- De manière **concomitante**, la **position** occupée par une voiture se déplaçant à km/h il y a 2 heures est **identique** à celle d'une **autre voiture** se déplaçant à km/h pendant 2 heures et partant de l'origine du repère également.
- Les élèves peuvent donc se référer à un **principe** d'**équivalence** ancré dans la **cinématique** pour renforcer la légitimité de la règle « moins par moins donne plus ».
- **Donc**, dans cette ingénierie…

« Moins par moins donne plus »

- La **construction** de la **règle** « moins par moins donne plus » par les élèves n'est **pas** une **application** du **principe formel** de **permanence** employé par Hankel.
- La **permanence** « **découle** » du **modèle** unique au sens où les élèves peuvent la **constater** a posteriori suite à l'adoption des règles relatives à la multiplication des nombres négatifs et la **justifier** selon différents **niveaux** de **rationalité** (Rouy, 2007) : expérimentations numériques, cohérence avec l'expérience cinématique, travail des conséquences formelles des règles.

« Moins par moins donne plus »

- Les **niveaux** de **justification** adoptés sont **hybrides** et typique d'un travail mathématique qui n'a pas encore atteint un stade de maturation où le **déductivo-formel prend** le **pas** sur les **autres niveaux** (Job & Schneider, 2015).
- Cependant **acculturer** les élèves à ce **type** de **modélisation** et à ses **conséquences** nous semble un **marchepied** intéressant pour faciliter leur **compréhension** de l'emploi de **principes** plus **formels** lorsqu'ils seront confrontés à des **mathématiques** plus **avancées**.

« Moins par moins donne plus »

- **Commentaire 2.**
- Plus généralement, l'exemple de la construction et de la justification de la règle « moins par moins donne plus » montre qu'on peut envisager des **activités** de **modélisation** dès 12 ans où la **dimension intra-mathématique** est **travaillée** de manière **centrale** et **articulée** à la **dimension extra-mathématiques**, cinématique en l'occurrence.
- Cette **caractéristique** nous semble **importante** en référence à la section 3 où nous savons relevé que cette **dimension intra-mathématique** est souvent le **parent pauvre** de l'enseignement des mathématiques en BF. Et en **France** ?

« Moins par moins donne plus »

- Cette **minoration** de l'**intra** n'est pas sans lien avec l'**utilitarisme « concret »** qui pilote PISA où la dimension intra est pour ainsi dire inexistante.
- Dans ce contexte, il nous semble dès lors important de souligner que les **deux dimensions intra** et **extra** ne sont **pas** mutuellement **exclusives.**

« Moins par moins donne plus »

- Bien au **contraire**, hormis dans des **cas triviaux**, la **constitution** de **modèles** du monde sensible amène à **réfléchir** sur l'adéquation du **matériau employé** pour constituer le modèle, ici les **mathématiques**.

« Moins par moins donne plus »

- **Commentaire 3.**
- Les **élèves** qui participent à l'ingénierie sont considérés comme faisant partie d'une **classe** « **faible** » de leur école.
- On mesure le **décalage** parfois significatif entre ce dont les **élèves** sont réellement **capables** et ce dont la **noosphère** les pense **capables**, ce qui **transparait** notamment dans les **programmes**.

« Moins par moins donne plus »

- Cette **ingénierie** n’est **pas** hors **programme** : les programmes en BF sont plus « **évasifs** » qu’en France.
- Elle est pourtant un **OVNI** dans le paysage institutionnel de la BF dont **peu** d’**enseignants accepteraient** de prendre la **responsabilité** dans le contexte de **classes** « **ordinaires** ».
- La **question** est toujours aussi **prégnante** de la **viabilité** dans les classes d’**ingénieries** issues de la recherche (même collaborative) et envisagées comme « **produit d’enseignement** » (et non comme méthodologie) autrement qu’à la marge.
- Cela suppose à **minima** de faire **évoluer** la **culture scolaire** vers une plus grande prise en compte de l’**importance** de prendre en charge la **dimension intra** de la modélisation.

« Moins par moins donne plus »

- **Commentaire 4.**
- D'**autres apprentissages** sont également en jeu dans cette activité de **modélisation**.
  - **Distinction** entre **position**, **espace parcouru** et **déplacement** (spatial).
  - **Distinction** entre **instant**, **durée** et **déplacement** (temporel).
  - Travail de l'**équivalence** de **modèles** dans un esprit similaire aux **programmes** de **calcul** lors des phases numériques exploratoires (,).
  - **Droites graduées** et systèmes d'**axes.**
  - Premières **fonctions**.
  - Représentations **graphiques** comparées.
  - **Lois** de **mouvements** qui permettent de travailler, d'une manière contrastée, **variables dépendantes** et **indépendantes**, **inconnues**, **variations**, **paramètres**.

Questionner l’intra-mathématique via la modélisation

- **Commentaire 5.**
- Pour terminer, cette ingénierie constitue une **composante** d’un **parcours** d’**étude** et de **recherche** plus vaste s’inscrivant dans la **durée**.
- En particulier, il devrait se poursuivre par l’étude des **mouvements rectilignes uniformément accélérés** pour permettre aux **élèves** de les **distinguer** des premiers mouvements étudiés et pour qu’ils apprennent à ne pas confondre **trajectoire** et **représentation graphique** d’une **loi** de **position**.

Exemple 2
Faire interagir algèbre et géométrie : Thalès, vecteurs et modélisation algébrique des droites du plan

Exemple 2

- **Poursuivons** dans la lignée ouverte avec l'exemple précédent pour **montrer** comment on peut envisager de développer le **travail** de cette **dimension intra-mathématique** de la **modélisation**, dans la **durée**, à l'échelle de **plusieurs années** scolaires.
- L'exemple retenu est celui de la **conception** d'un **modèle algébrique** des **droites** du **plan** euclidien.

- L'**intérêt** porté à un tel **modèle** est **lié** à la manière dont **droites** et **algèbre** sont **articulées** en **BF**.
- L'**ostensif** (et périphériques) apparait pour la première fois en 3^{e} année (14-15 ans) dans le contexte de l'étude des **fonctions** du **premier degré**.

Exemple 2

- Les **programmes** demandent de traiter la **représentation graphique** de telles fonctions et de discuter les **rôles** de et .
- Une **manière répandue** d'effectuer ce traitement est d'**amener** les **élèves** à **constater** l'**alignement** des **points** du **graphique** sur des exemples numériques et d'**ensuite** assortir ce constat de **justifications** comme la suivante : « chaque fois que j'augmente d'une unité, l'image de la fonction augmente de ».

Exemple 2

- Dans ce type de traitement, les **fonctions du 1^{er} degré** ne constituent donc **pas** un **modèle algébrique** des **droites** du plan, intentionnellement **construit**.
- L'**idée** même que les **fonctions** du **1^{er} degré** puissent être **construites** et résulter d'une activité de modélisation est **absente** : elles constituent des **préconstruits** au sens de Chevallard.
- Au « mieux » les **fonctions** du **1^{er} degré** peuvent être **appliquées** à telle ou telle situation.
- Le **lien** avec les **droites** est pour ainsi dire un **effet** de **bord** « non contrôlé ».

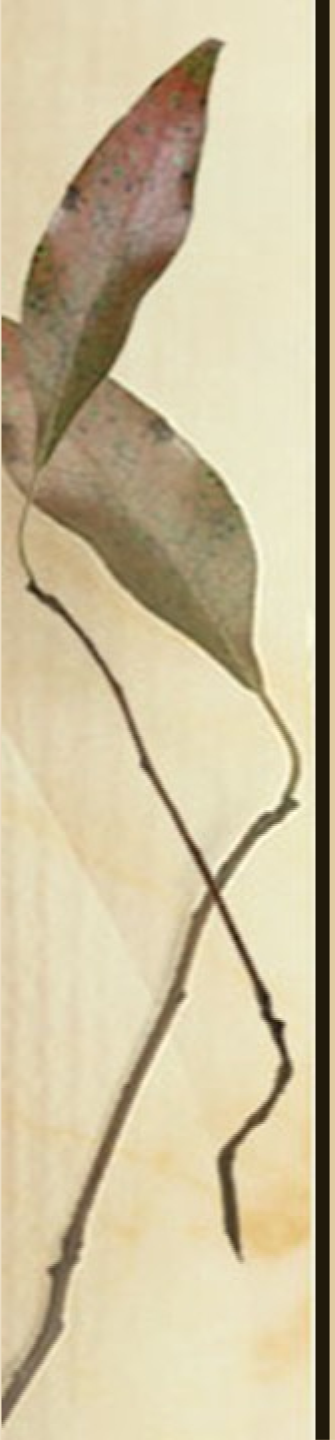
Exemple 2

- Bien qu'il n'y ait **pas** d'**interdiction** dans les **programmes**, dans la **pratique**, les parties de **géométrie** (Thalès et Pythagore) vivent dans un espace **disjoint** des parties **algébriques** (fonctions constantes et du 1er degré, outils algébriques…).
  - Anecdote d'étudiants en formation initiale à qui on demande de justifier .
- Or, nous avons relevé l'**importance** de la **dialectique** de **modélisation réciproque** entre **algèbre** et **géométrie** comme un des vecteurs de l'**économie** de **pensée** qui caractérise les mathématiques.
- On peut donc s'interroger sur la **possibilité** de faire **vivre** une telle **dialectique** dans les **classes**.
- L'**occasion** semble **rêvée** puisque le **théorème** de **Thalès** est précisément au **programme** de cette même **3^{e}**.

Première version du théorème de Thalès
Comparaison de distances

Thalès 1

- La **version typique** du **théorème** de **Thalès** rencontrée en BF est la suivante.

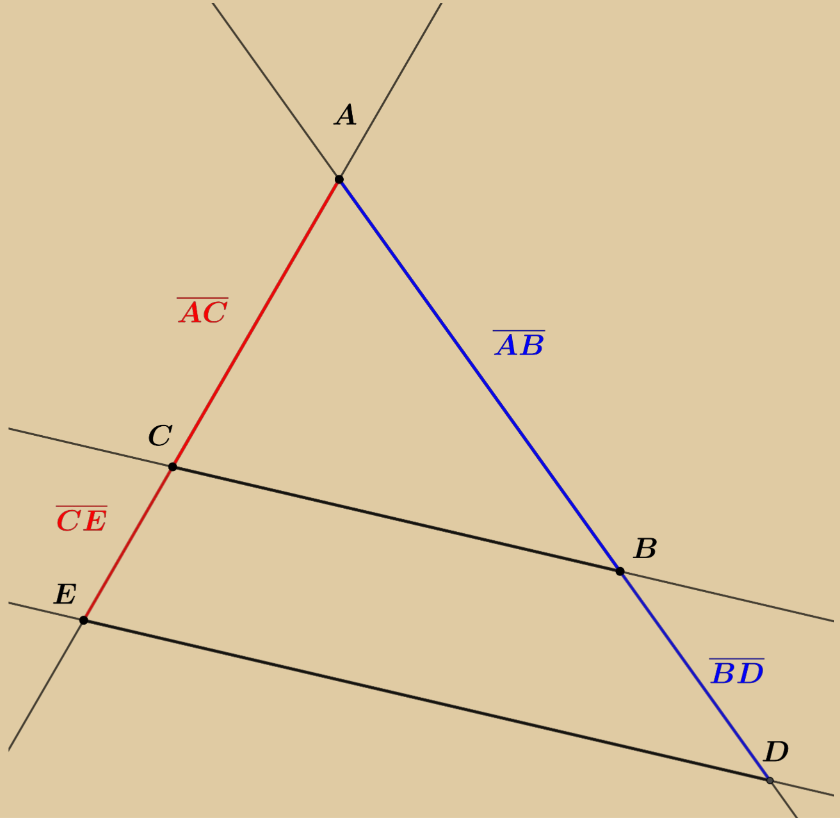


Thalès 1

Théorème de Thalès (version 1).

Plaçons-nous dans le plan euclidien . Considérons un triangle et deux points et respectivement sur la droite et la droite de sorte que pour former un triangle .

Alors



Thalès 1

- **Remarque.**
- **Attention** aux **notations** !
- Les conventions ne sont pas forcément les mêmes partout.
- Ici la **notation** désigne la **longueur** du **segment** et non sa **mesure algébrique** (comme en France ?).

Thalès 1

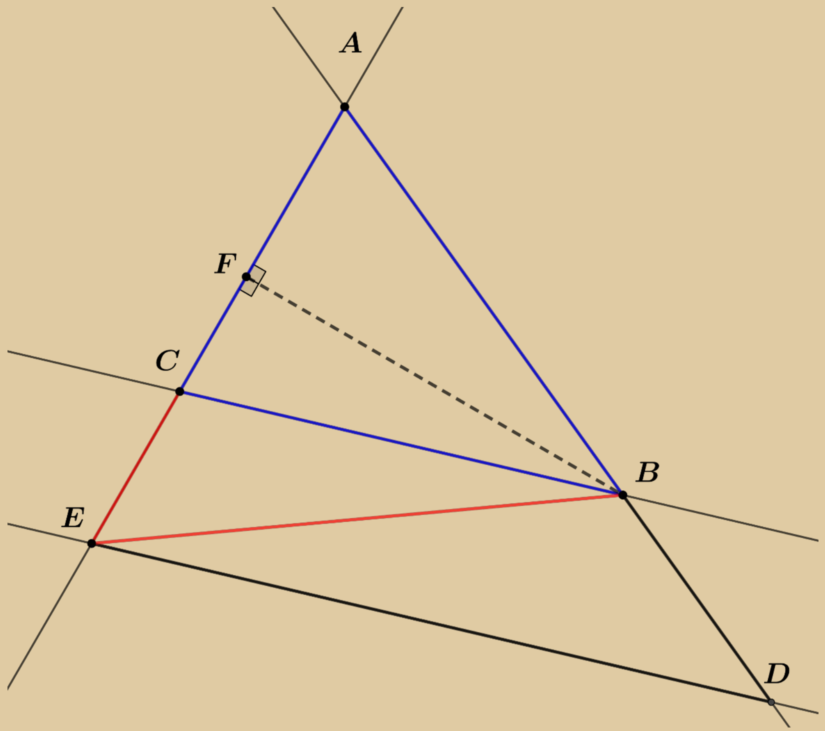
- Le **programme impose** de ne **pas démontrer** cette version du théorème de Thalès.
- Thalès est pour l'essentiel **introduit** par **effet** de « **naturalisation** » en prenant appui sur les « **intuitions** » associées aux notions de **réduction/agrandissement proportionnels** de figures.

Thalès 1

- Une **démonstration** mettant en œuvre la **formule** permettant de calculer l'**aire** d'un **triangle** pourrait cependant être donnée à ce niveau éducatif.
- Voici les **grandes lignes** de la démonstration « par les aires ».
- On **découpe** de **2 manières différentes** la **figure** de départ.

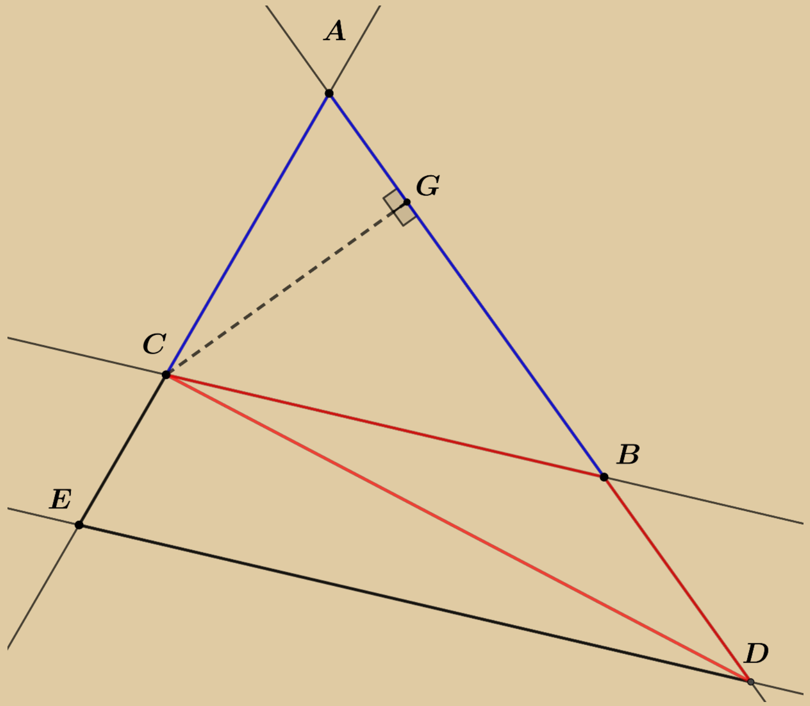
Thalès 1

- **Première** découpe.
- On calcule le rapport des aires () des triangles
  et ayant une hauteur commune pour obtenir



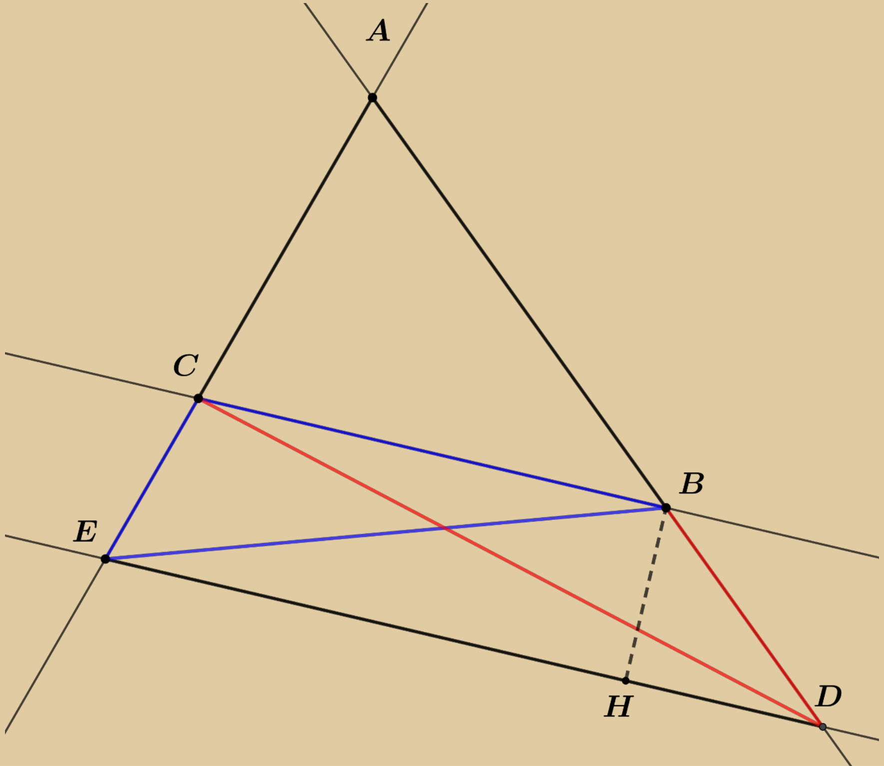
Thalès 1

- **Deuxième** découpe.
- On calcule le rapport des aires () des triangles et



Thalès 1

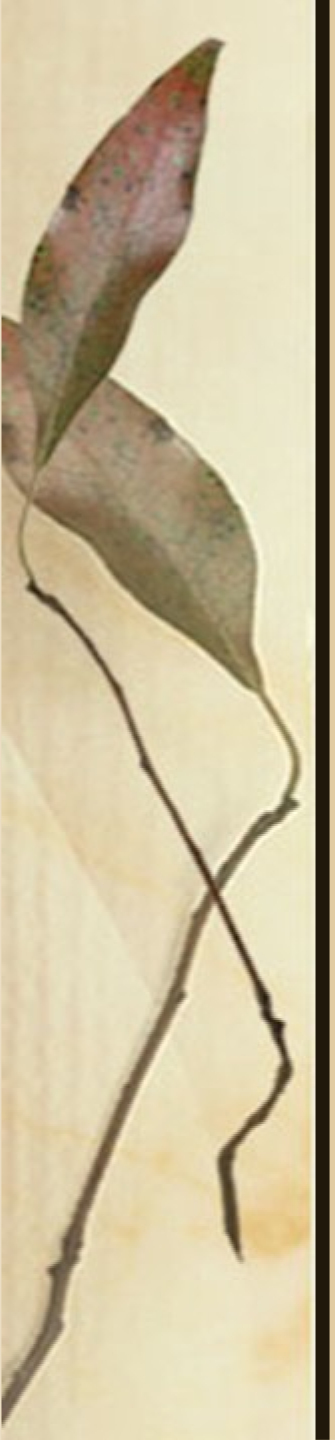
- On met en relation les conclusions intermédiaires et
- Les triangles et ont **même aire** car **même base** et **même hauteur** .



Thalès 1

- On peut donc en **déduire** que

- Cette **démonstration** du **théorème** de **Thalès** sera contrastée par la suite et le **lien** avec la **modélisation explicité**.



Modélisation algébrique des droites du plan à l’aide de la 1er version du théorème de Thalès

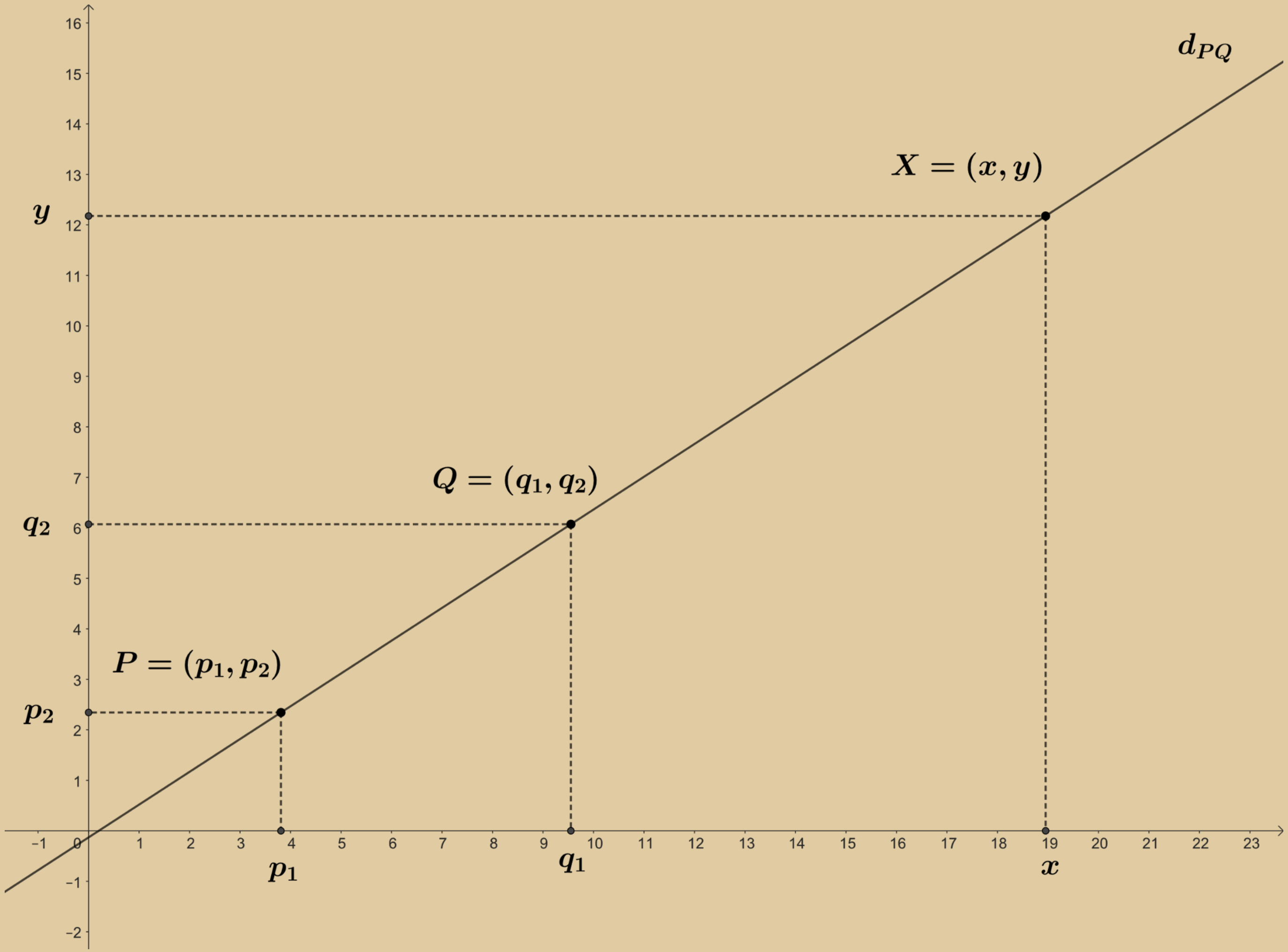
Application Thalès 1

- On peut **mettre** à **profit** le théorème de **Thalès** pour **obtenir** un **modèle algébrique** des **droites** du plan comme suit.

Application Thalès 1

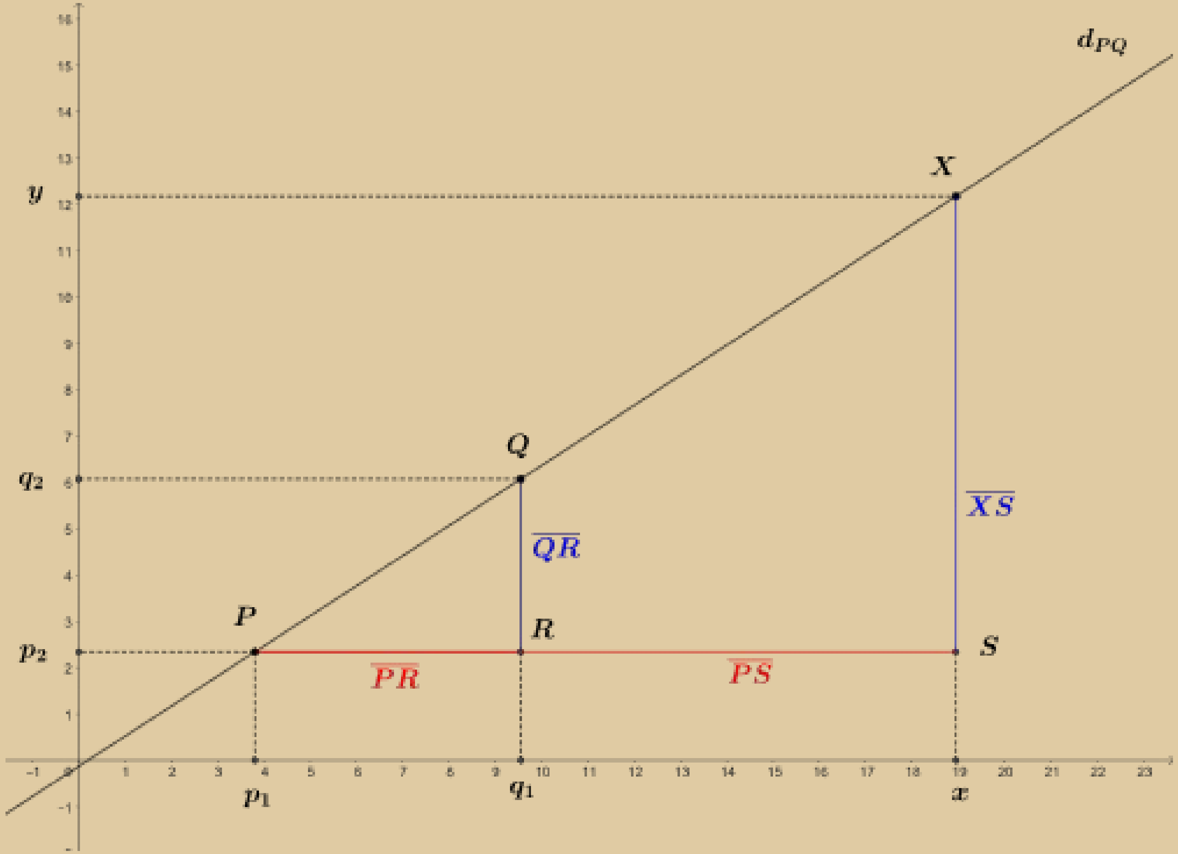
- On prend tels que .
- Comme , il existe une **unique droite** . telle que et .
- **Prenons** aussi .
- **Munissons** le **plan** euclidien d'un **repère**.
- Dans ce repère, on peut **attribuer** des **coordonnées** à ces **points** que nous noterons respectivement et et .

Application Thalès 1



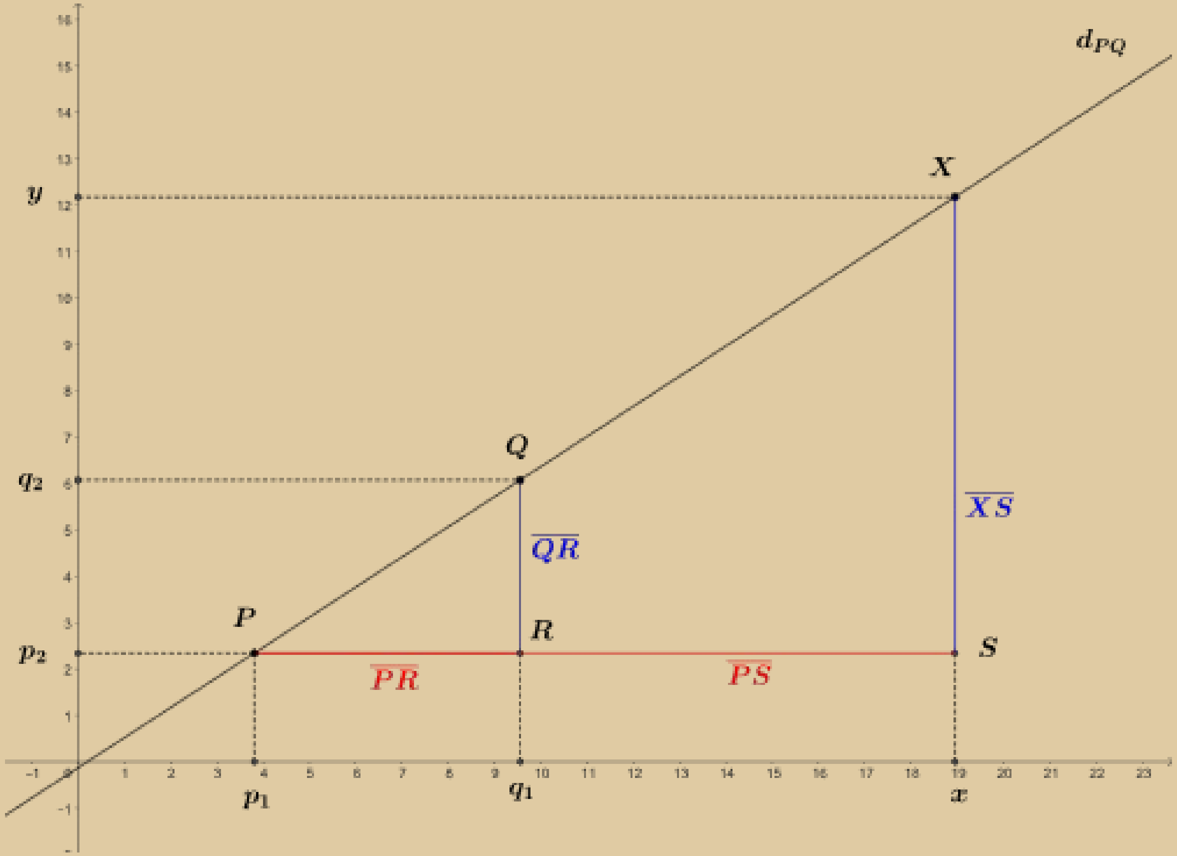
Application Thalès 1

Dans cette configuration, on peut identifier les triangles et .



Application Thalès 1

On applique Thalès 1 pour obtenir le rapport



Application Thalès 1

On développer ce rapport grâce aux coordonnées des points :

On obtient alors le résultat suivant.

Application Thalès 1

Théorème.

Considérons des points tels que .

Si

Alors

.

Application Thalès 1

On peut ensuite consolider notre modèle en montrant que la réciproque est satisfaite et aboutir au résultat suivant.

Application Thalès 1

Théorème.

Considérons des points tels que .

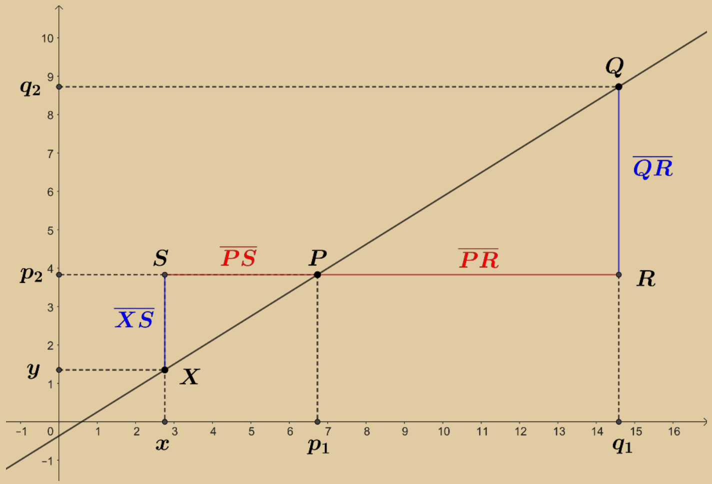
Alors

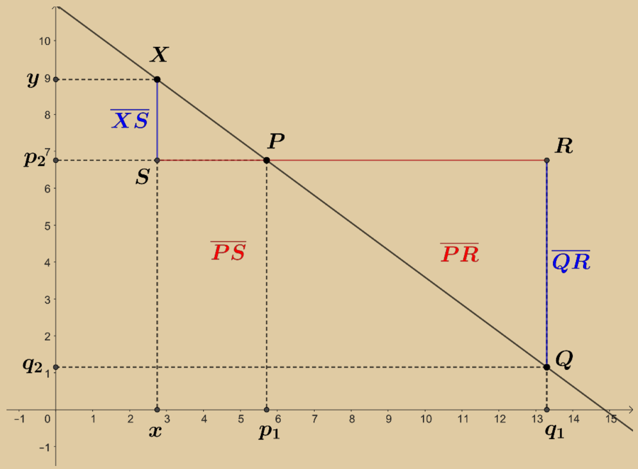
Application Thalès 1

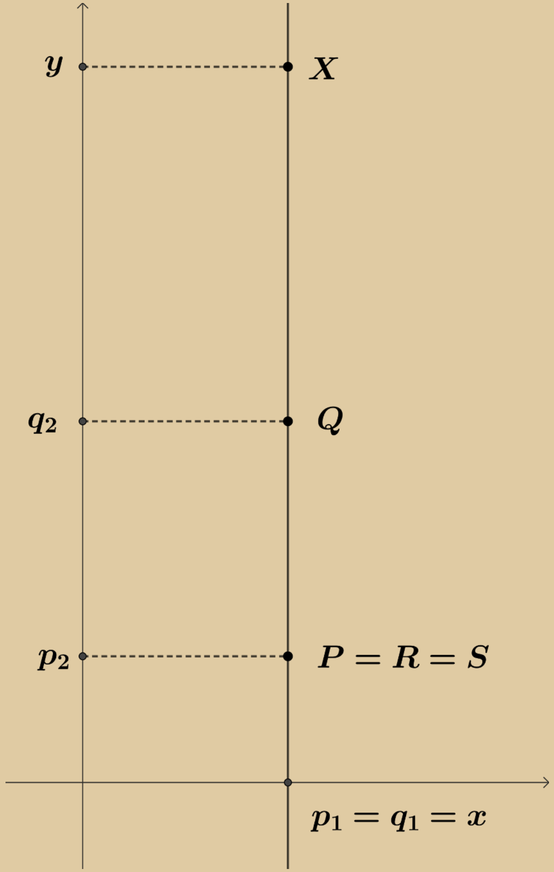
- Pour **obtenir** ce **modèle algébrique** des droites du plan

- on est parti d'un **cas** de figure **particulier**.
- Mais il **existe** d'**autres cas** de figure dont les suivants

Application Thalès 1





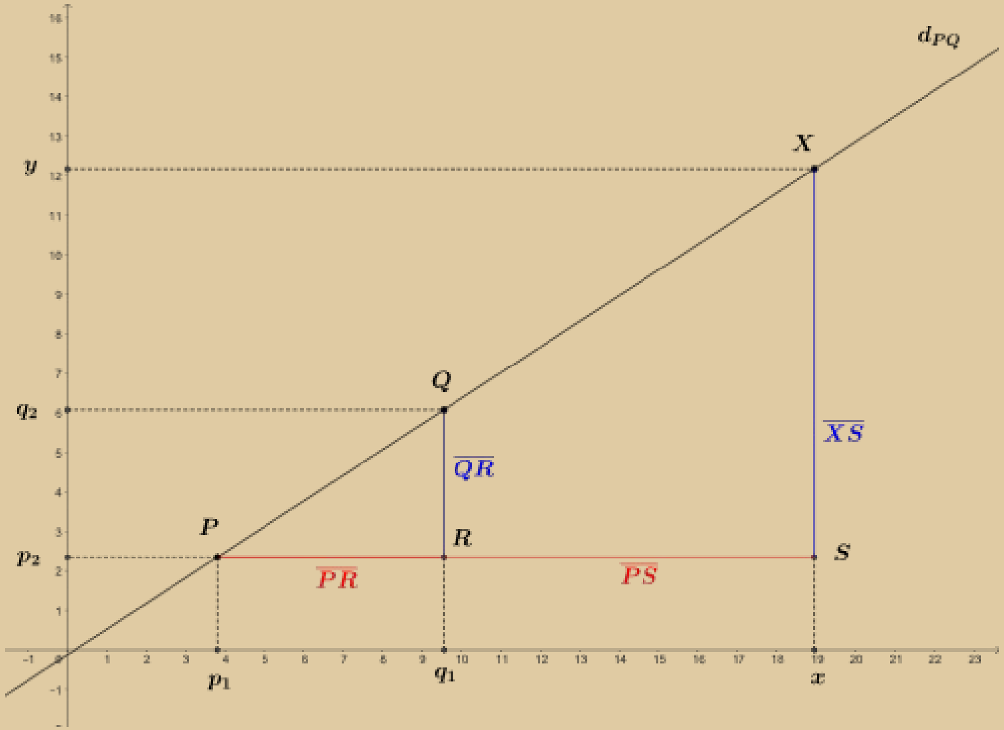


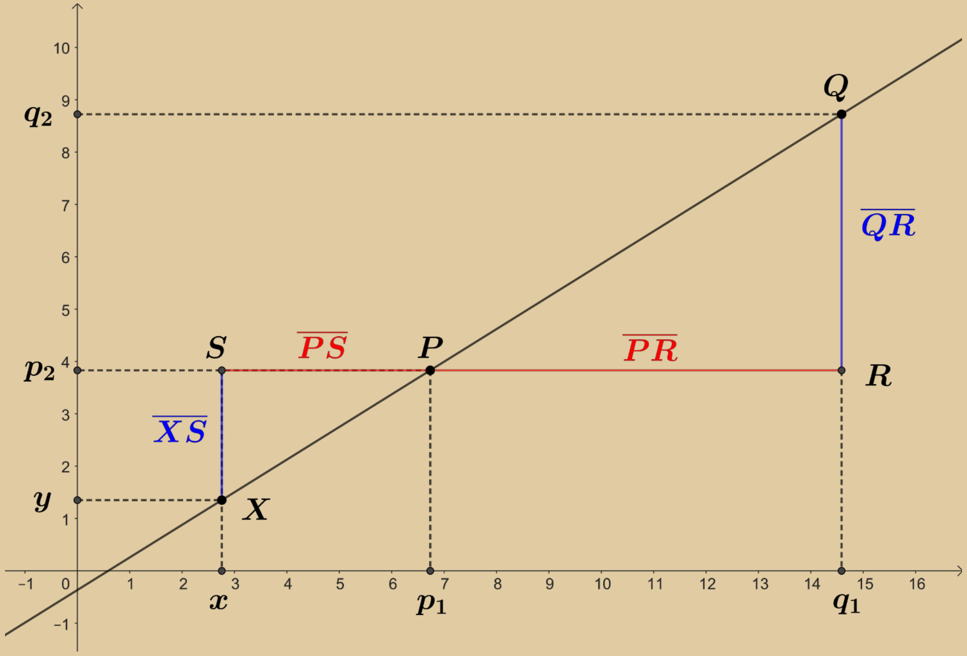
Application Thalès 1

- Ces **autres cas** de **figure** constituent autant d'**opportunités** d'**impliquer** les **élèves** dans la **constitution** et la **justification** du **modèle algébrique** des **droites** en cours de constitution.
- Il s'agit également de leur faire **travailler Thalès autrement** que dans **exercices** stéréotypés **autoréférents**.
- Les **élèves** participent à un travail de plus grande portée : la constitution d'un modèle **valable** dans **tous** les **cas** de **figure**.
- Développer un tel **modèle unifié** suppose notamment de **questionner** le **nombre** de **cas** de **figure** à envisager et donc d'**examiner** la **manière** précise dont l'**application** de **Thalès** **conduit** au **modèle** algébrique.
- Ce **questionnement** est **important** car…

Application Thalès 1

- Dans le premier cas de figure par exemple on a alors que dans le second on a



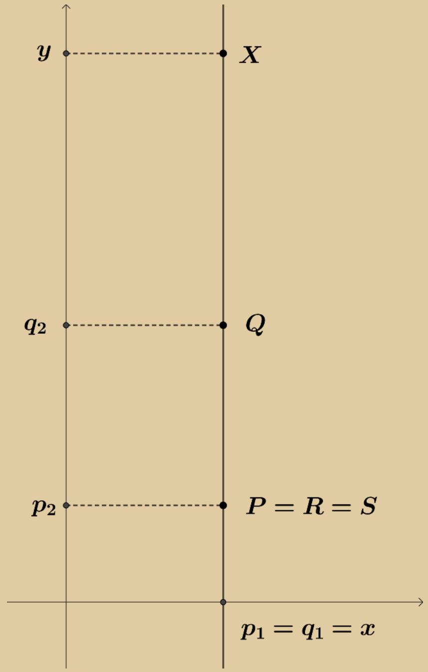


Application Thalès 1

- Il n’est donc **pas** a priori **évident** que des **cas** de figure **différents** conduisent à un **même** **modèle** algébrique.
- Il faut s’en **assurer**.

Application Thalès 1

- C'est d'autant moins évident que **Thalès** n'est **pas applicable** au cas de figure ci-dessous car et le rapport n'a pas de sens.



Application Thalès 1

- **Pourtant** le **modèle** algébrique est **encore** d'**application** dans ce cas de figure.
- Voilà un cas de figure tout à fait intéressant qui montre que le **modèle** algébrique « **dépasse** » en quelque sorte l'**outil** initialement employé (Thalès, dans cette version) pour l'obtenir.
  - Topologie…

Application Thalès 1

- On offre ainsi une **opportunité** de **travailler** la **dimension** proprement **intra**-mathématique des modèles mathématiques.
- Nous sommes à « 20 000 lieux sous les maths » si on prend comme point de référence la **transparence trompeuse** dont peuvent être porteurs les **modèles** issus de certains « **problèmes en mots** » comme ceux rencontrés en arithmétique ou en optimisation.

Seconde version du théorème de Thalès
Comparaison de vecteurs

Thalès 2

- La **modélisation algébrique** des **droites** du plan peut être **réinvestie** l’année suivante en **4**^{e} vers (15-16 ans) en lien avec les **vecteurs** introduits cette même année.
- En BF, les **vecteurs** se réduisent souvent pour les **élèves** à des « **petites flèches** » qu’on peut **combiner graphiquement** en traçant des **parallélogrammes** et sur lesquelles on peut faire certains **calculs numériques** contractuels.

Thalès 2

- Pour les **élèves**, l’**instrumentalité** des vecteurs comme **outil** de **modélisation** et de **démonstration** est fortement limitée.
- La **modélisation algébrique** des droites du plan offre une **opportunité** aux **élèves** de donner une certaine **épaisseur épistémologique** aux **vecteurs** en leur permettant de **vivre** le fait que ces **vecteurs** constituent un outil de **modélisation** et de **démonstration efficace** propre à réaliser une **économie** de **pensée** substantielle.
- Voici les **grandes lignes** d’un tel cheminement.

Thalès 2

- En **3**^{e}, la **multiplicité** des **cas** de figure à envisager pour développer un modèle algébrique des droites du plan au départ de Thalès 1 a constitué un **moteur** pour **mettre** les **élèves** au **travail**.
- En **4**^{e}, cette **multiplicité** peut être **mise** à **contribution différemment**.
- Cette fois c'est la **pénibilité** de devoir passer **tous** les **cas** de figure en **revue** qui est mise en **avant** (cf. .
- Comment être **certain** par ailleurs de ne **pas** en avoir **oublié** ?
- Enfin, le **théorème** de **Thalès** n'est **pas applicable** à **tous** les **cas** de figure (cf. quotient nul).

Thalès 2

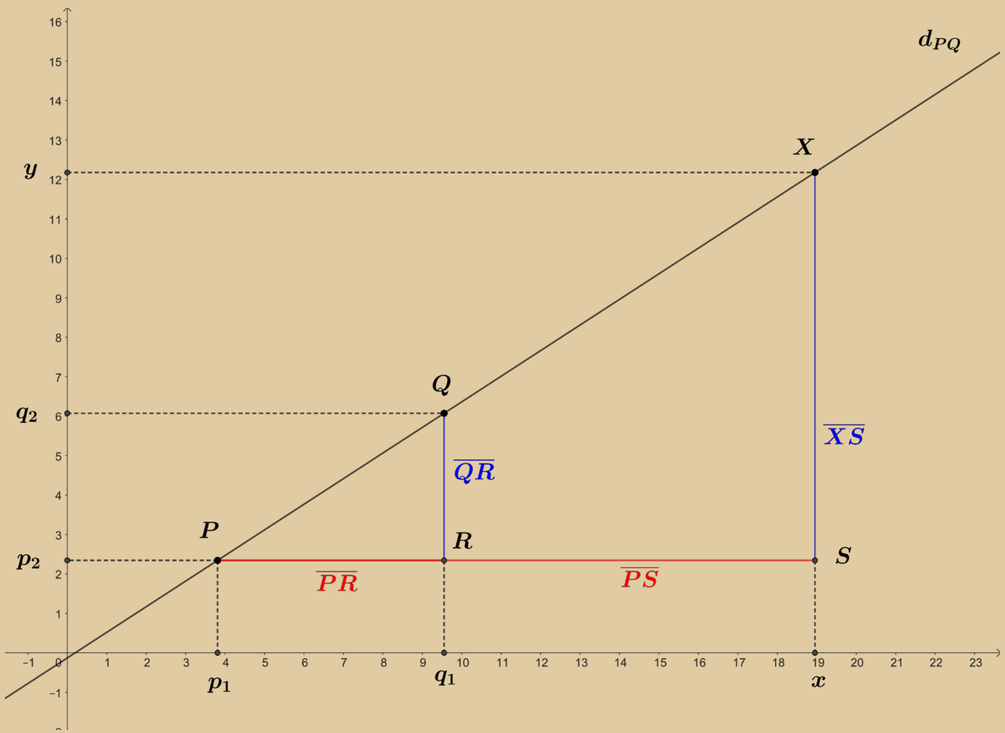
- Ne pourrait-on, à l'image du développement du modèle unique **examiner** de près les **différences** entre les **cas de figure** ?
- **Il s'agirait d'identifier** d'**où** elles **viennent** et, sur cette base, d'envisager la possibilité de mettre au point un **nouveau théorème**, **valable**, **quel que soit** le **cas de figure** considéré.

Thalès 2

- Dans les **3 cas de figure** envisagés plus haut,
- on **applique Thalès**.
- On **obtient** l'égalité .
- **Selon** le **cas de figure**, cette **égalité** se **particularise** de **différentes façons**.
- Ces **différences** par rapport au premier cas de figure sont **reprises ci-dessous**.
- Elle sont **marquées** en **vert** pour les faire ressortir.

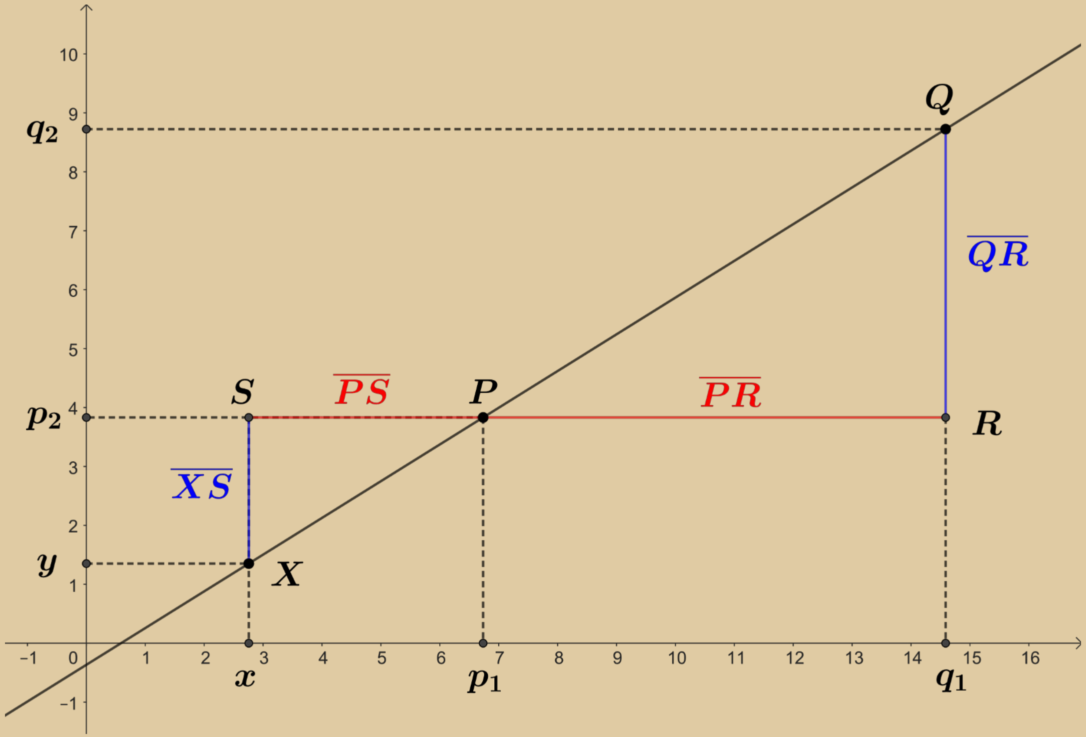
Thalès 2

Cas de figure 1



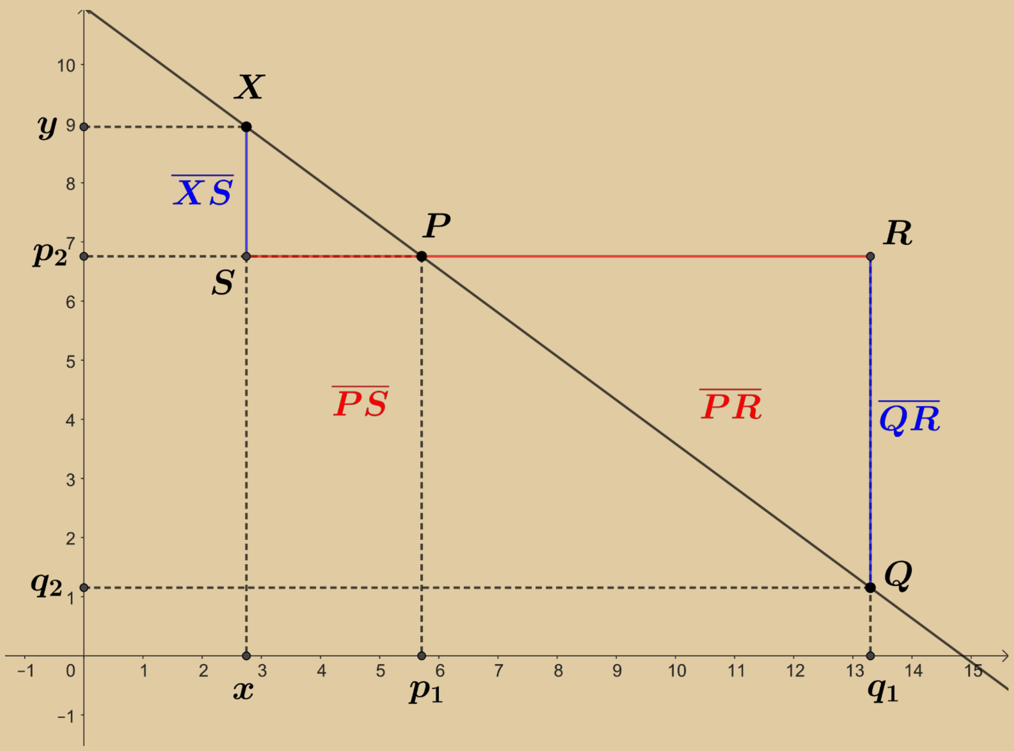
Thalès 2

Cas de figure 2



Thalès 2

Cas de figure 3



Thalès 2

- **Malgré** ces **différences**, on aboutit à chaque fois au **même modèle algébrique**.
- Car…
- Après analyse ces **égalités** sont toutes **équivalentes** à l'**égalité**.
- **En effet**…

Thalès 2

Cas de figure 1

Thalès 2

Cas de figure 2

Thalès 2

Cas de figure 3

Thalès 2

- Cette **analyse suggère** l'**idée** suivante.
- **Reformuler Thalès** pour…
- **Obtenir directement**
- **Au lieu de**
- Dans **tous** les **cas de figure**.

Thalès 2

- Si c'est **possible**, on pourrait alors **obtenir** notre **modèle algébrique** des **droites** en **une seule fois**.
- **Sans** devoir **considérer différents cas de figure**.
- Est-ce **possible** ?

Thalès 2

Commençons par réécrire

sous une forme un peu différente.

Thalès 2

Il existe tel que

et

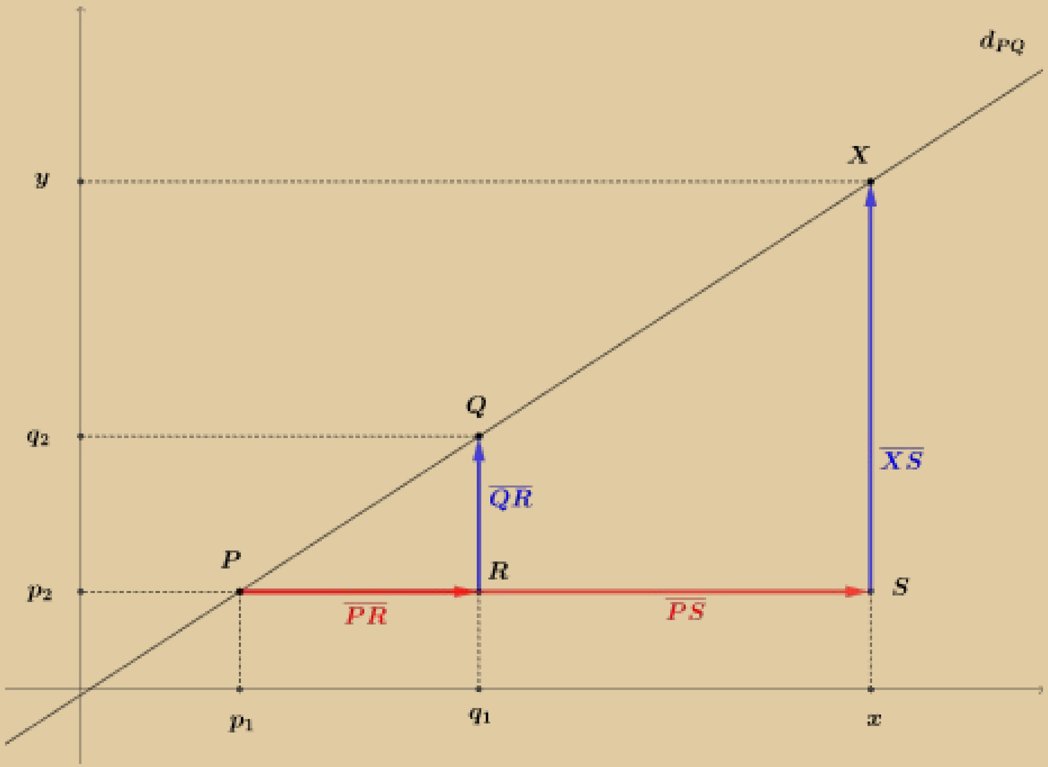
Il existe tel que

et

Thalès 2

- et peuvent s’interpréter comme **manifestations** de deux **égalités vectorielles**.
- En outre, ces égalités ne **souffrent pas** du **problème** du **quotient nul** évoqué précédemment.

Thalès 2



d_{PQ}
y
X
q_2
Q
$\overline{XS}$
$\overline{QR}$
P
R
S
p_2
$\overline{PR}$
$\overline{PS}$
p_1
q_1
x

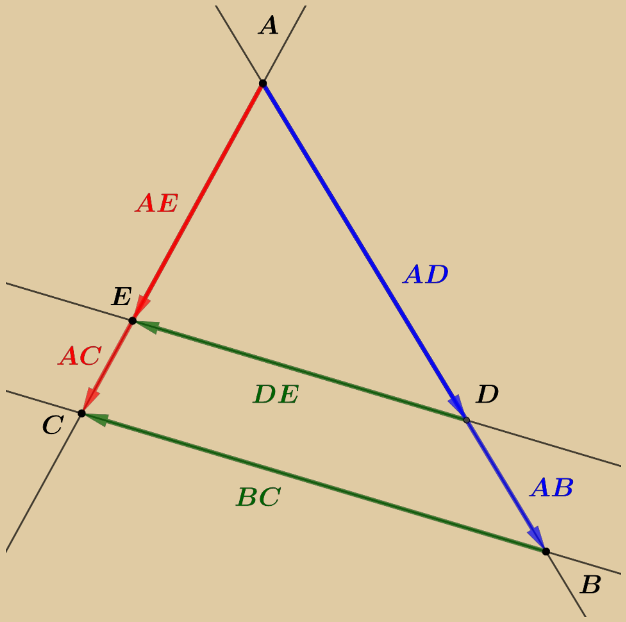
Thalès 2

- On est donc tenté de **reformuler Thalès** comme suit, à l'aide de la **notion** de **vecteur**.

Thalès 2

Théorème de Thalès (version 2).

Considérons un triangle et deux points et respectivement sur la droite et la droite de sorte que . Alors il existe un nombre tel que



Thalès 2

- Le raisonnement qui conduit à cette **nouvelle version** de **Thalès** constitue un travail de **modélisation** à part entière localisé à un **niveau** proprement **intra**-mathématique, peu courant au secondaire .
- Il s’agit de **raffiner** un **modèle** existant (Thalès 1) en analysant ses **limites** d’**applicabilité**.
- On peut considérer qu’il s’agit d’un **travail** dans un esprit **proof-generated** à la Lakatos (1976).

Thalès 2

- Avoir **reformulé** le théorème de **Thalès** de façon **vectorielle** ne **signifie pas** que cette nouvelle version soit valide.
- Encore faut-il le **démontrer**.

Thalès 2

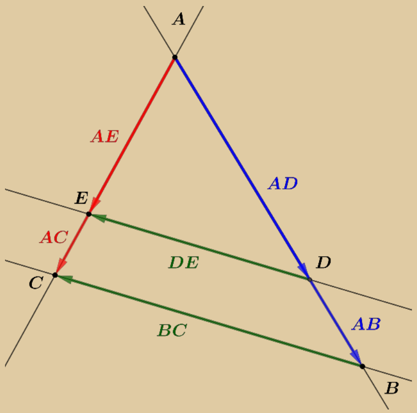
Démonstration.

. Donc il existe un nombre tel que

. Donc il existe un nombre tel que

. Donc il existe un nombre tel que

On peut **décomposer** de **deux manières** différentes.

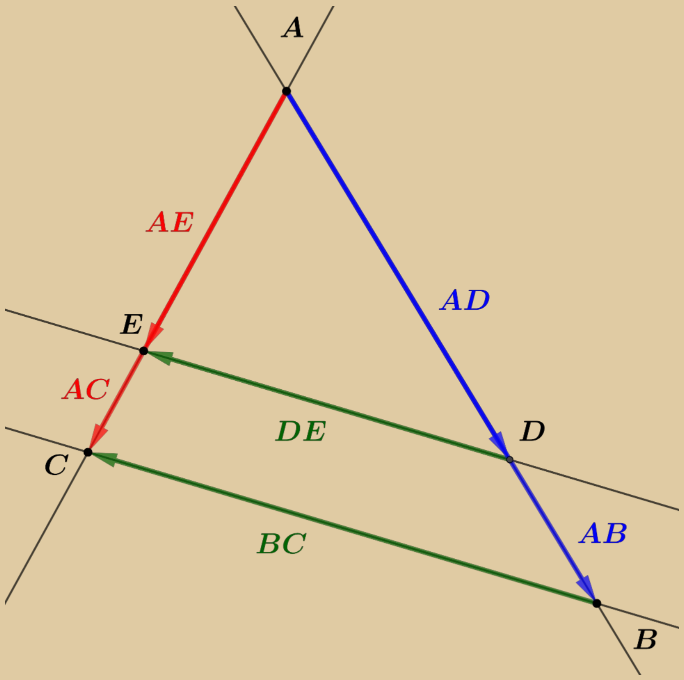


Thalès 2

Première manière.

Deuxième manière.

On peut donc en conclure que

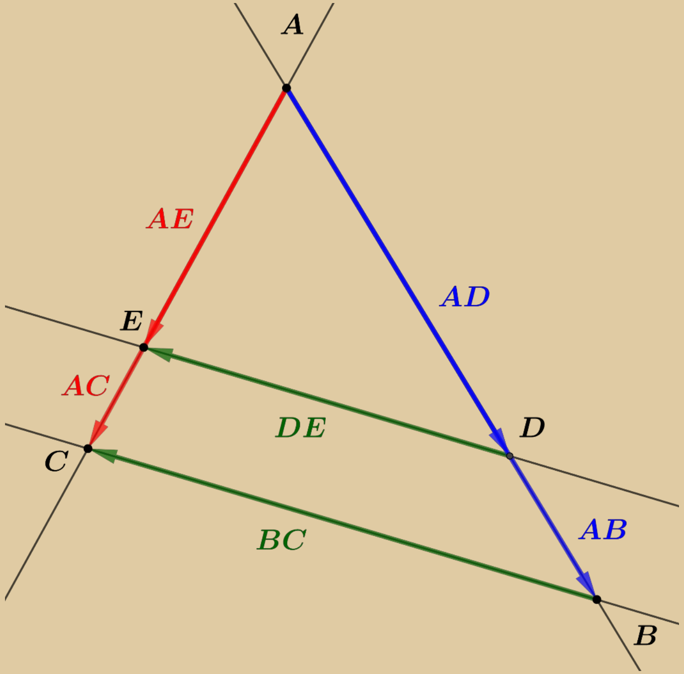


Thalès 2

Les vecteurs et ne sont pas parallèles.

Donc

C'est-à-dire



Thalès 2

On a bien montré que

Thalès 2 est démontré.

Thalès 2

- Les **vecteurs** sont donc bien **autre chose** que des « **petites flèches** ».
- Ce sont à la fois des **outils** de **modélisation** (Thalès 2) et de **démonstration** (preuve de Thalès 2) **efficaces**.
- **Pas besoin** de penser à des **triangles astucieux** comme dans la **démonstration** « par les **aires** » de la **1er version** de **Thalès**.
- Tout peut se faire en **quelques lignes** de **calcul** et ainsi **réaliser** une **économie** substantielle de **pensée**.

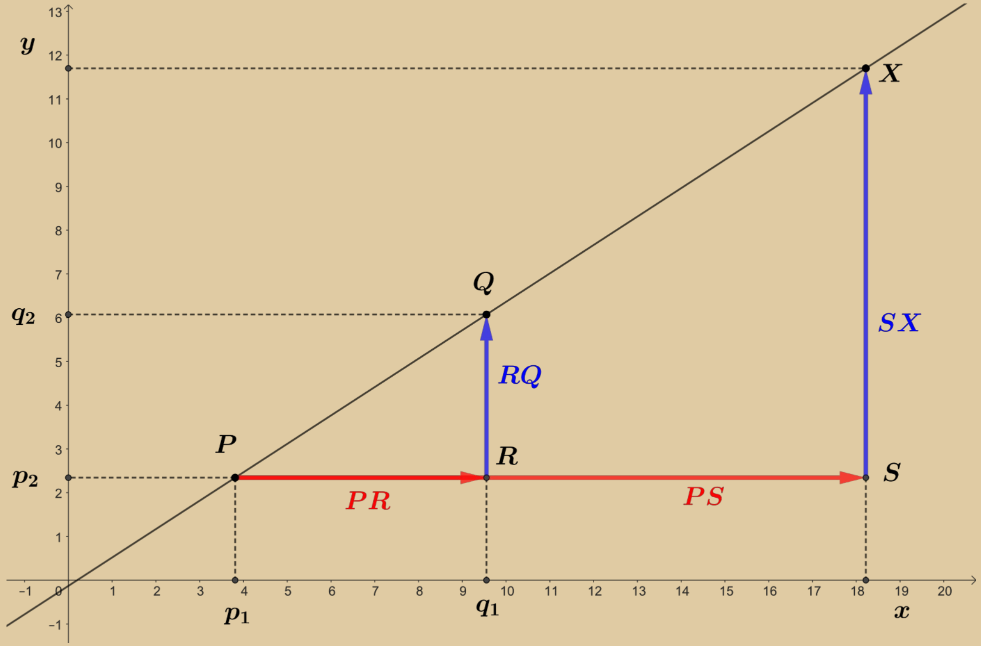
Modélisation algébrique des droites du plan à l'aide de la 2^{e} version du théorème de Thalès

Application Thalès 2

- On peut **mettre** à **profit** cette seconde version du théorème de **Thalès** pour **obtenir** un **modèle algébrique** des **droites** du plan comme suit.

Application Thalès 2

Par Thalès 2



Donc

Par transitivité de l'égalité, on a

Application Thalès 2

On a donc démontré le résultat suivant.

Théorème.

Considérons des points tels que .

Si

Alors

.

Application Thalès 2

- On mesure l'**intérêt** de **Thalès 2** pour **construire** un **modèle algébrique** des droites.
- L'utilisation des **vecteurs** nous permet d'**éviter** le **traitement** d'une **multitude** de **cas différents** comme avec Thalès 1.
- **Une seule démonstration toujours valable** en **quelques lignes** de **calcul**.
- **Contraste** important à nouveau avec la première version et sa multitude de cas à traiter.
- **Économie** substantielle de **pensée**.

Thalès 2

- **Quelques commentaires sur ce parcours.**
- On pourrait être **tenté**, comme cela se pratique en BF, de prendre d'emblée la **modélisation vectorielle** d'une **droite** comme un **donné** non questionné et **non questionnable** et d'en **déduire** l'**équation cartésienne** d'une droite.
- Procéder de la sorte **prive** les **élèves** de la possibilité de **saisir** ce que peut signifier **réaliser** une **économie** de **pensée** dans le cadre de la **conception** de **modèles** évolutifs et quelle est la **légitimité** de ces **modèles** (épisode du parallélogramme gauche).
- **Efficacité** oui mais par rapport à **quoi** ?
- **Sans** ce « **quoi** » les élèves n'ont pas la possibilité de percevoir **où** réside l'**instrumentalité** d'approches plus sophistiquées comme l'approche vectorielle.
- Comment dès lors peuvent-ils s'**intéresser** et s'**investir** de manière non superficielle dans de tels formalismes ?

Thalès 2

- Le parcours ébauché s'inscrit dans une perspective de **travail** de la **modélisation** et de la **constitution** d'une **économie** de **pensée** qui se réalise **dans la durée** et **pas** uniquement de manière **ponctuelle** pour satisfaire à **minima** aux exigences **programmatiques** de mise en œuvre de la **compétence** « **modélisation** ».
- Envisager un tel travail dans la **durée** sur un **empan** de plusieurs années nous semble de nature à contribuer au **décloisonnement** des branches mathématiques (algèbre et géométrie) au sein d'une même année et **entre années**.

Thalès 2

- Dans quelle mesure le travail de la modélisation prenant au sérieux la **dimension intra-mathématique** peut-il contribuer à **sortir** du **cercle vicieux** où il est **institutionnellement admis** pour un élève d'**oublier** (tout ou presque) d'une année à l'autre conduisant par **effet** de **contrat** l'enseignant à entamer le pèlerinage des **rappels** à **portée** effective quasi **nulle** ?
- Ne peut-on **créer** les **conditions** d'une **culture scolaire** dans laquelle il est pleinement **légitime** de **questionner** des **savoirs antérieurs** et de les envisager sous de **nouveaux jours**.
- La **modélisation** (fonctionnelle) entendue comme vecteur de l'économie de pensée nous semble constituer une piste digne d'intérêt.

Merci pour votre écoute !

Bibliographie

- Artigue, M. (2015). Enseignement et apprentissage de l'algèbre au collège : quel apport pour les TICE ? *Revue de l'APMEP*, 514 326-340.
- Bart, D., & Daunay, B. (2016). *Les Blagues à PISA*. Vulaines-sur-Seine : Éditions du Croquant.
- Bolea P., Bosch M., & Gascon J. (2001). *La transposicion didactica de organizaciones matematicas en proceso de algebrizacion, El caso de la proporcionalidad*. Recherches de Didactique des Mathématiques, 21(3), 247-304.
- Bourbaki, N. (1969). *Éléments d'histoire des mathématiques*. Hermann.
- Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège : deuxième partie : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.
- Chevallard, Y. (1991a). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Publications de l'Institut de recherche mathématiques de Rennes*, S6, 160-163. http://www.numdam.org/item?id=PSMIR_1991___S6_160_0
- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 19(2), 221–266. https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/
- Dunia Mwati, A. (2015). De l'écologie d'un discours heuristique d'acculturation à l'algèbre linéaire. Thèse soutenue à l'Université de Liège.

Bibliographie

- Henroyay, P., Krysinska, M., Rosseel & Schneider, M. (2015). *Des Fonctions taillées sur mesure*. Liège : Presses Universitaires de Liège.
- Job, P. (2011). *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques* [Thèse de doctorat, Université de Liège].
- Job, P., & Schneider, M. (2015). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM Mathematics Education*, 46, 635-646.
- Job, P., Krysinska, M., & Schneider, M. (2023). Un enseignement de l'algèbre structuré par la modélisation, du secondaire au supérieur. *Repères IREM*, 128, 5-38.
- Krysinska, M., & Schneider, M. (2010). *Émergence de modèles fonctionnels*. Liège (Belgique) : Presses Universitaires de Liège.
- Lebeau, C., & Schneider, M. (2009). *Vers une modélisation algébrique des points, droites et plans*. Les Éditions de l'Université de Liège.
- Matheron, Y. (2009). *Mémoire et Étude des Mathématiques. Une approche didactique à caractère anthropologique*. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.
- Matheron, Y. (2012). *PISA : Prudence (envers les) Interprétations Statistiques Avancées.* IFE, EAM-ADEF, conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques du 13 mars 2012. http://educmath.ens-lyon.fr/Educmath/dossier-manifestations/conference-nationale/conference-nationale-textes-4
- Nguyen, G., Schneider, M. (2017). *Une approche heuristique d'une géométrie calculatoire*. Presses Universitaires de Liège.
- Rosseel, H., Schneider, M. (2009). *Des grandeurs inaccessibles à la géométrie du triangle*. Presses Universitaires de Liège.

Bibliographie

- Schneider, M. (2002). A propos de l'évaluation des compétences en mathématiques : le cas de la résolution de problèmes. In Grifed (Ed.) *L'évaluation des compétences chez l'apprenant*, 37-45. Louvain-la-Neuve : Presses universitaires.
- Schneider, M. (2003). Les échecs électifs en mathématiques : un regard inspiré de la didactique, *Mathématique et Pédagogie*, *140*, 71-90.
- Schneider, M. (2006a). Quand le courant pédagogique « des compétences » empêche une structuration des enseignements autour de l'étude et de la classification de questions parentes. *Revue Française de Pédagogie*, *154*, 85-96. https://doi.org/10.4000/rfp.136
- Schneider, M. (2006b). Comment des théories didactiques permettent-ils de penser le transfert en mathématiques ou dans d'autres disciplines ? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *26/1*, 9-38.
- Schneider, M. (2011). *Traité de didactique des mathématiques - La didactique par des exemples et contre-exemples*. Liège : Presses Universitaire de Liège.
- Schneider, M. (2016). Rapport du groupe de travail mathématique pour le pacte d'excellence.
- Schneider, M., Job, P., Matheron, Y., & Mercier, A. (2015). Extensions praxémiques liées aux ensembles de nombres : des complexes aux relatifs. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 20, 9-46.

Bibliographie

- Service Générale du Pilotage du Système Éducatif. (s.d.) PISA 2003. Évaluation de la culture mathématique des jeunes de 15 ans. Document à l'attention des professeurs de mathématiques des 1er et 2ème degrés de l'enseignement secondaire.
- Van Dieren, F. (2005). *« Enseigner par compétences » ou « former à travers une discipline » : où sont les contradictions ?* Conférence donnée au colloque franco-finlandais sur « L'enseignement des mathématiques à partir de l'enquête PISA » à Paris, les 6-8 octobre 2005.
- Vlassis, J., (2010). *Sens et symboles en Mathématiques : Étude de l'utilisation du signe « moins » dans les réductions polynomiales et la résolution d'équations du premier degré à une inconnue.* Berne (Suisse) : Peter Lang.