

**Redynamiser : donner du sens
à ce que nous enseignons**

Les fonctions

NOTRE MÉTHODOLOGIE

A- Quelles sont les raisons d'être des notions mathématiques ?

3 pistes de recherche, exemplifiées sur les fonctions

B- Nos choix pour traiter un programme

- Etudier des questions dignes d'intérêt : lesquelles ?
- Organiser les contenus à enseigner à un niveau donné pour apporter des réponses à ces questions

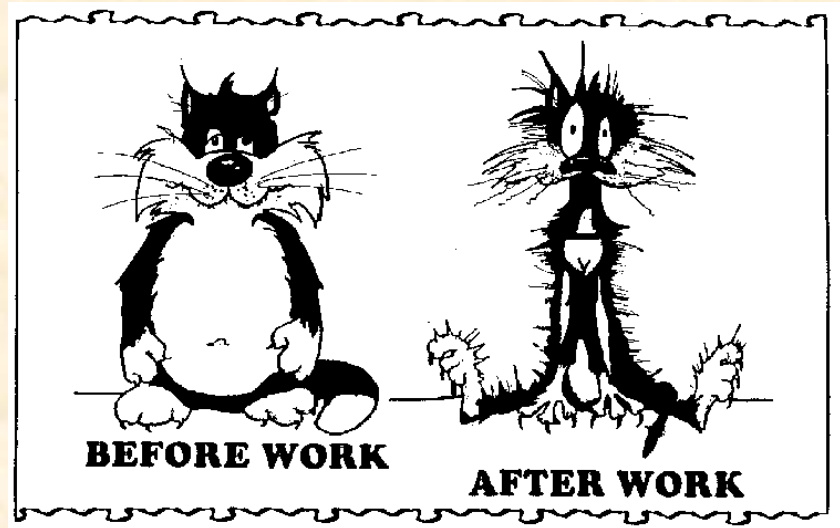
C- Bilans provisoires

A – Les raisons d’être des notions mathématiques

Questions très générales :

- Pourquoi étudier la géométrie ?
- Pourquoi étudier les fonctions ?
- Pourquoi étudier les nombres ?
- Pourquoi faire des statistiques ?
- Pourquoi étudier la résolution d’équations ?

.....



**Quelles sont les raisons d'être
des fonctions ?**

Des exemples de tâches ou types de tâches

- décrire la dépendance entre deux quantités
- savoir comment varie une quantité
- calculer une quantité à partir d'une autre (équations)
- estimer une quantité à partir d'une autre (algorithmes)
- comparer une quantité à une autre
- comparer les variations de plusieurs quantités (taux de variation)
- optimiser une quantité
- étalonner (élaborer une échelle)
- modéliser une situation (liens avec la physique, l'économie,...)
- interpoler
- extrapoler (prévoir, faire une projection)
- ...

Types de tâches : une classification possible

- **Optimiser** une quantité
- **Décrire** la dépendance entre deux quantités
- **Comparer** plusieurs quantités
- **Modéliser** une situation
- **Estimer** une quantité (interpolation, extrapolation,..)
- ...

A- Trois pistes de recherche sur les fonctions

Trois pistes de recherche

I- Quelles sont /ont été les utilisations des fonctions en et hors mathématiques ? --> Écologie des fonctions

II- Dans quels contextes les notions relevant du domaine des fonctions ont-elles été créées ? --> Étude historique de la notion de fonction

III- Que nous apprennent les transpositions successives subies par les programmes ? --> Regard sur l'histoire de l'enseignement de la notion de fonction.

I- Étude écologique

**Pour décrire
la dépendance
entre deux
quantités...**

TARIFS COLISSIMO SUIVI SANS / AVEC RECOMMANDÉ pour un envoi vers la France Métropolitaine, Corse, Monaco.				
Poids / Valeur du recommandé	Sans	R1*	R2*	R3*
jusqu'à 500 grs	5,10 €	7,60 €	8,20 €	9,10 €
de 501 grs jusqu'à 1000 grs	6,30 €	8,80 €	9,40 €	10,30 €
de 1001 grs jusqu'à 2000 grs	7,20 €	9,70 €	10,30 €	11,20 €
de 2001 grs jusqu'à 3000 grs	8,10 €	10,60 €	11,20 €	12,10 €
de 3001 grs jusqu'à 5000 grs	10,00 €	12,50 €	13,10 €	14,00 €
de 5001 grs jusqu'à 7000 grs	11,80 €	14,30 €	14,90 €	15,80 €
de 7001 grs jusqu'à 10000 grs	14,50 €	17,00 €	17,60 €	18,50 €
de 10001 grs jusqu'à 15000 grs	16,30 €	18,80 €	19,40 €	20,30 €
de 15001 grs jusqu'à 30000 grs	21,60 €	24,10 €	24,70 €	25,60 €

... Pour déterminer une quantité à partir d'une autre

Evolution de la population française depuis 1985 (en milliers d'habitants)

année	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Populat° en milliers	56 600	56 886	57 192	57 519	57 859	58 171	58 459	58 745	58 995	59 210

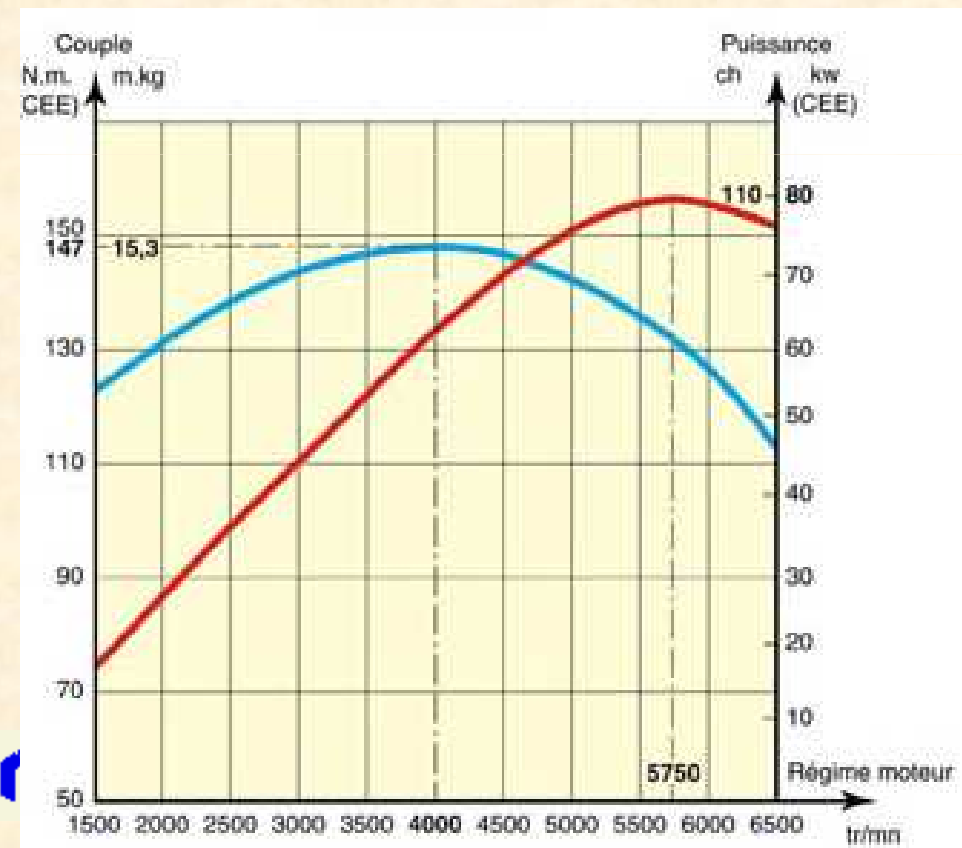
1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005
59 419	59 624	59 831	60 047	60 336	60 714	61 120	61 530	61 932	62 324	62 702

C4	1.4i 16V	1.6i 16V	1.6i 16V BVA
Couple maxi CEE (Nm-tr/mn)	133 - 3250	147 - 4000	147 - 4000
Puissance maxi DIN (ch-tr/mn)	90 - 5250	110 - 5750	110 - 5750



Pour décrire la dépendance entre deux quantités...

... Pour optimiser



Pour décrire la dépendance entre deux quantités...

Si
votre
"QF"
(R/N)

n'excède pas 4121 €	vosre impôt sera égal à 0 €
est compris entre 4121€ et 8104 €	vosre impôt sera égal à $(R \times 0,075) - (309,08 \times N)$
est compris entre 8104 € et 14264 €	vosre impôt sera égal à $(R \times 0,21) - (1403,12 \times N)$
est compris entre 14264 € et 23096 €	vosre impôt sera égal à $(R \times 0,31) - (2829,52 \times N)$
est compris entre 23096 € et 37579 €	vosre impôt sera égal à $(R \times 0,41) - (5139,12 \times N)$
est compris entre 37579 € et 46343 €	vosre impôt sera égal à $(R \times 0,4675) - (7299,91 \times N)$
est supérieur à 46343 €	vosre impôt sera égal à $(R \times 0,5275) - (10080,49 \times N)$

... Pour déterminer une quantité à partir d'une autre

Le calcul de l'indice de masse corporelle (IMC)

se fait au moyen d'une simple équation

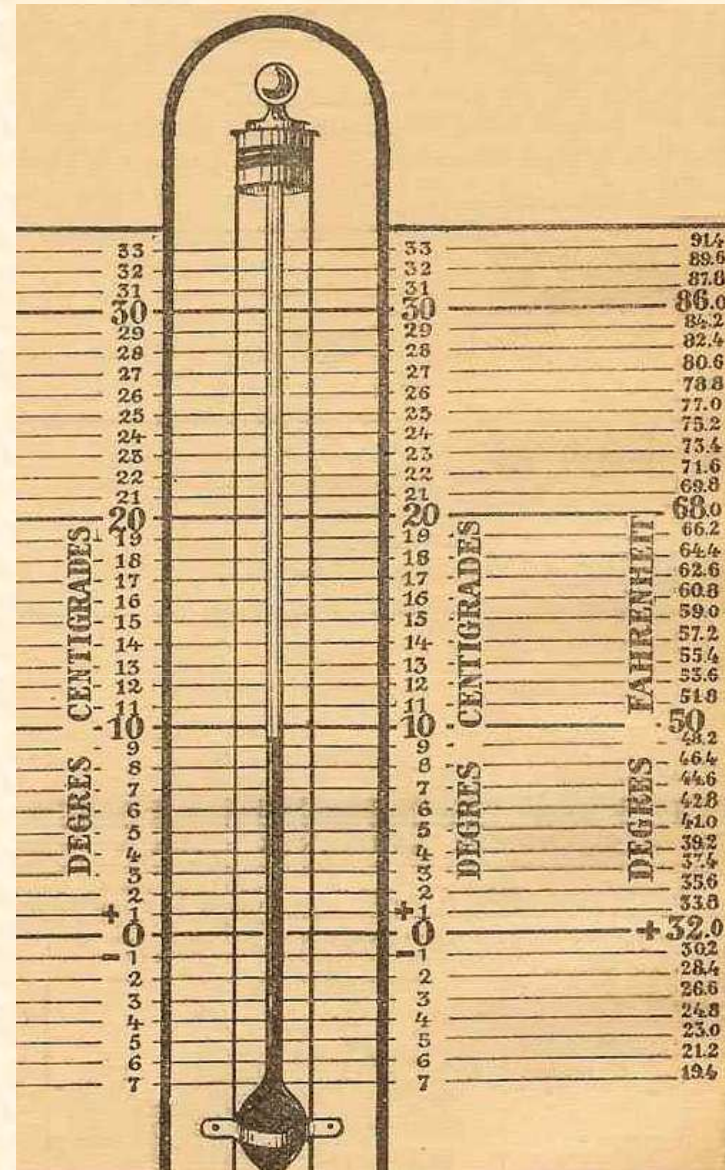
$$\text{IMC} = \text{Poids} / (\text{Taille})^2$$

<http://www.automesure.com/Pages/calculimc.html>

Pour étalonner ...

Formules de conversions Fahrenheit/Rankine/Celsius/Kelvin

Conversion de	vers	Formule
Fahrenheit	Rankine	$^{\circ}\text{Ra} = ^{\circ}\text{F} + 459,67$
Rankine	Fahrenheit	$^{\circ}\text{F} = ^{\circ}\text{Ra} - 459,67$
Fahrenheit	Celsius	$^{\circ}\text{C} = (^{\circ}\text{F} - 32) / 1,8$ $^{\circ}\text{C} = 5/9 \times (^{\circ}\text{F} + 40) - 40$
Celsius	Fahrenheit	$^{\circ}\text{F} = ^{\circ}\text{C} \times 1,8 + 32$ $^{\circ}\text{F} = 9/5 \times (^{\circ}\text{C} + 40) - 40$
Fahrenheit	Kelvin	$\text{K} = (^{\circ}\text{F} - 32) / 1,8 + 273,15$
Kelvin	Fahrenheit	$^{\circ}\text{F} = (\text{K} - 273,15) \times 1,8 + 32$
Celsius	Rankine	$^{\circ}\text{Ra} = (^{\circ}\text{C} + 273,15) \times 1,8$
Kelvin	Celsius	$^{\circ}\text{C} = (\text{K} - 273,15)$

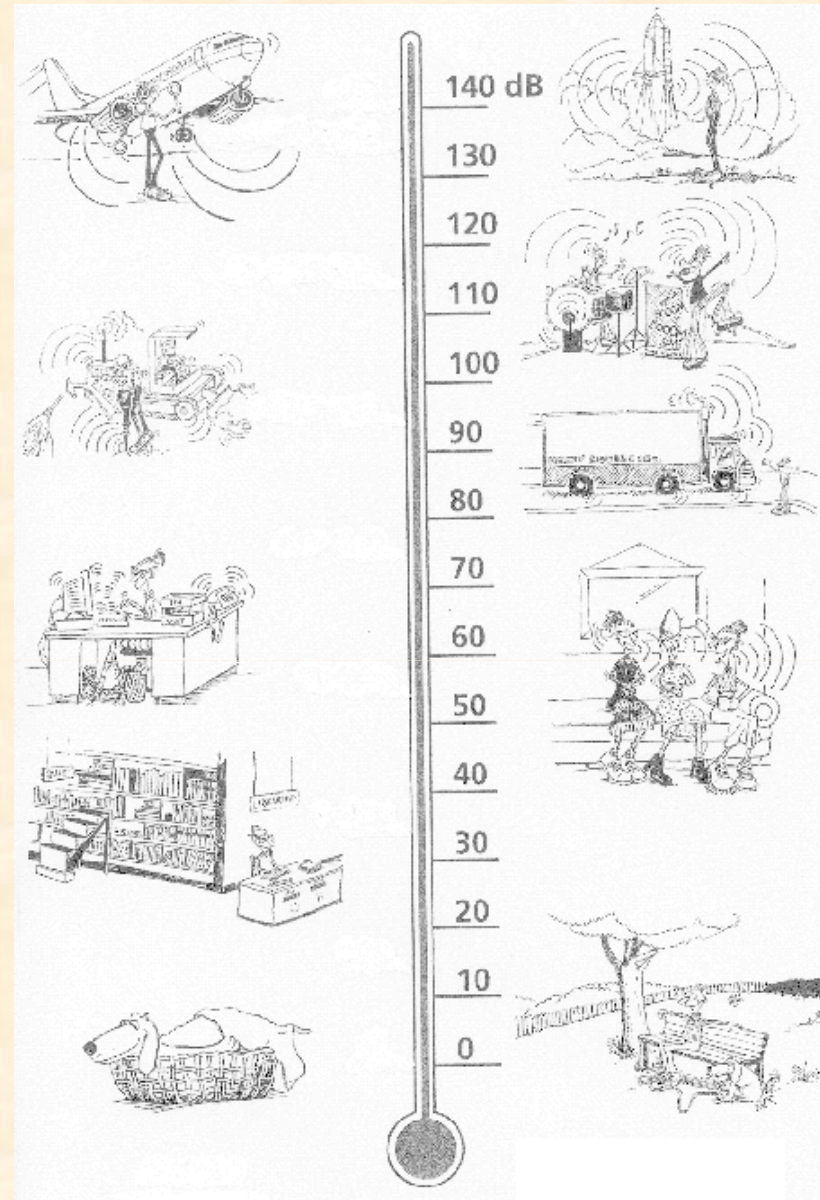


... Pour déterminer une quantité à partir d'une autre

Pour étalonner ...

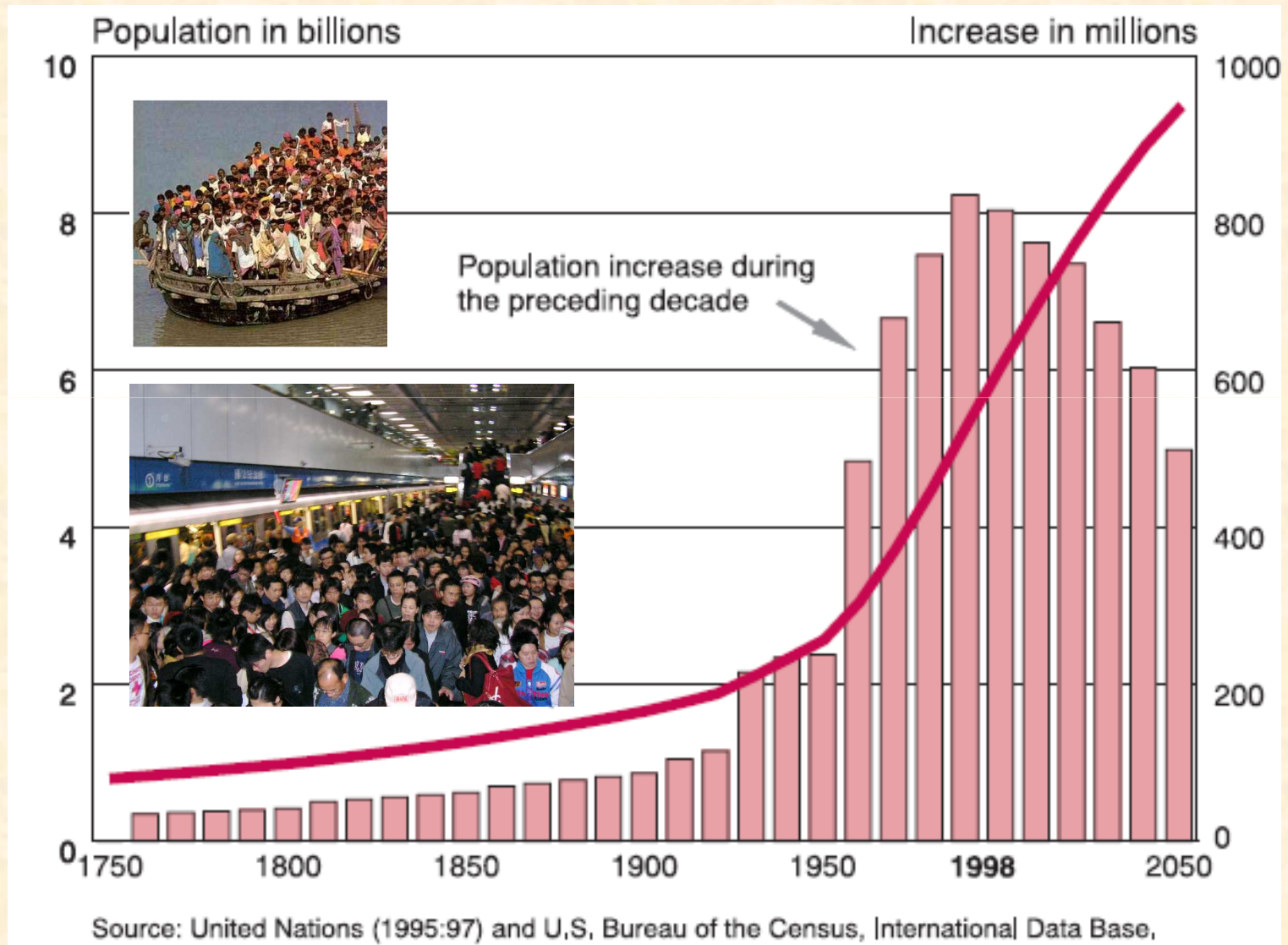


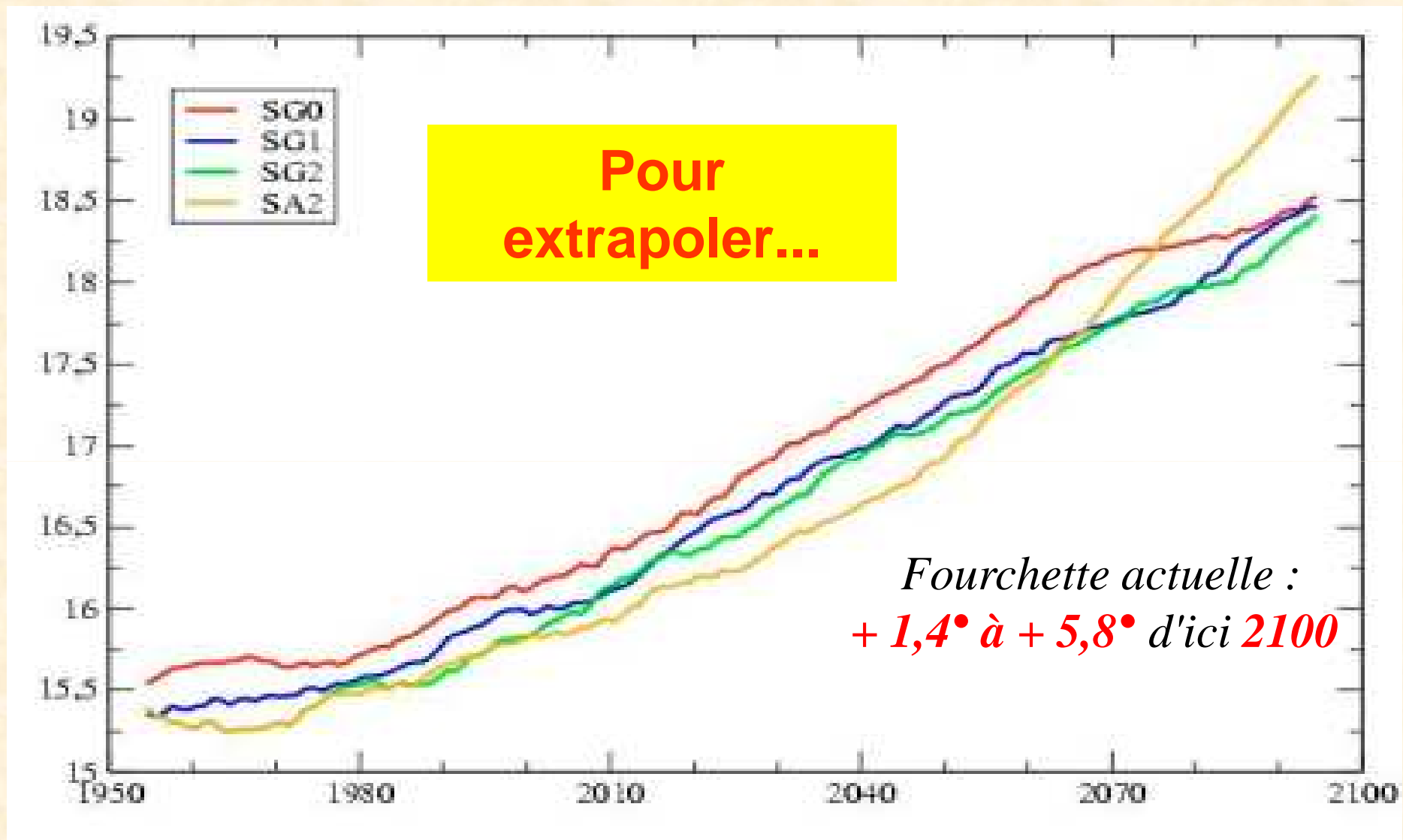
<i>Séismes</i>	$\text{Log} \left(\frac{A}{A_0} \right)$	A : amplitude max. sur un sismographe
<i>Etoiles</i>	$- 2,5 \log \left(\frac{E}{E_0} \right)$	E : flux (intensité lumineuse par unité de surface)
<i>Sons</i>	$10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$	I : intensité sonore



... Pour déterminer une quantité à partir d'une autre

Pour comparer des vitesses de croissance



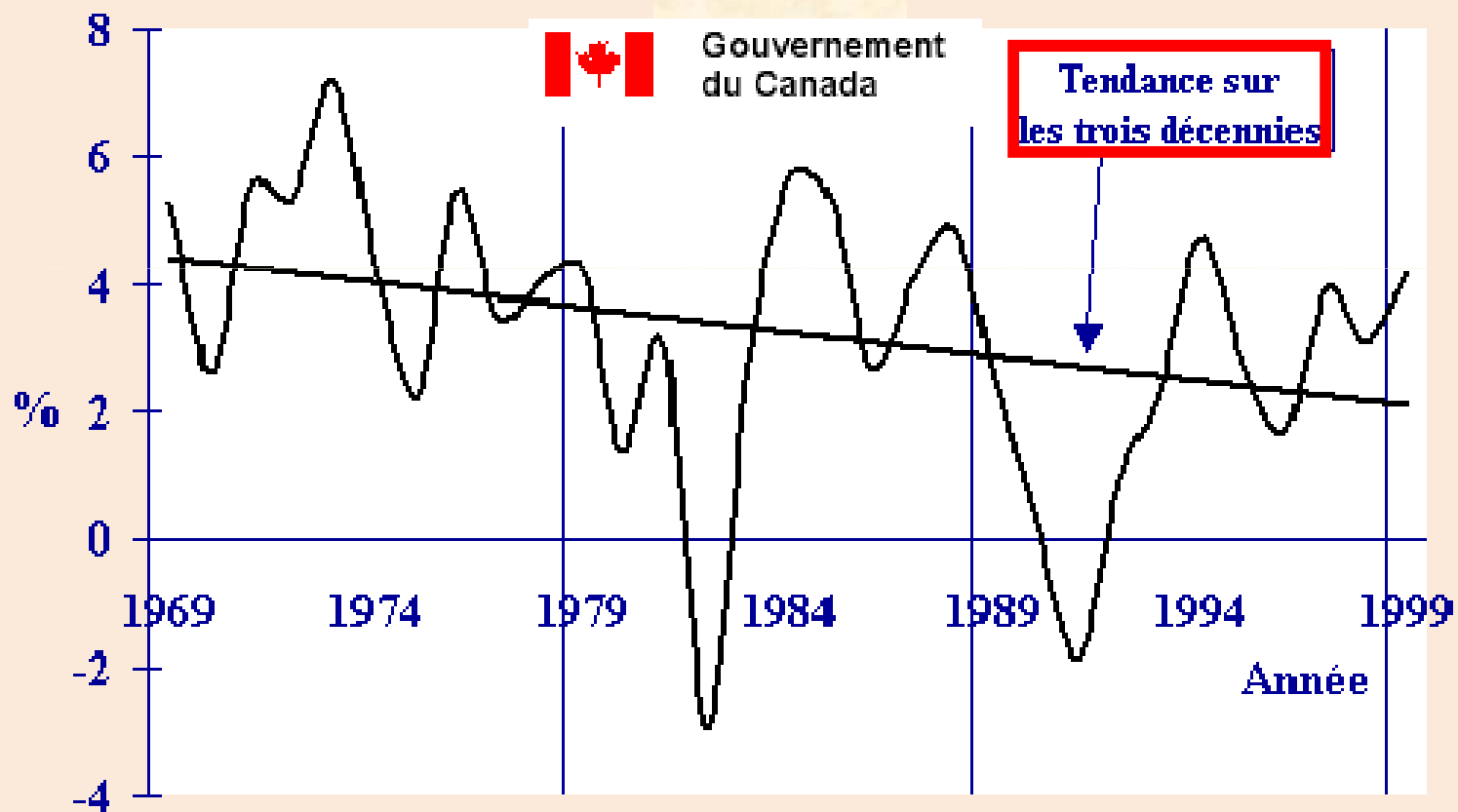


Influence du CO2 : simulation d'Arpège Climat (modèle global) © CNRM, 2002

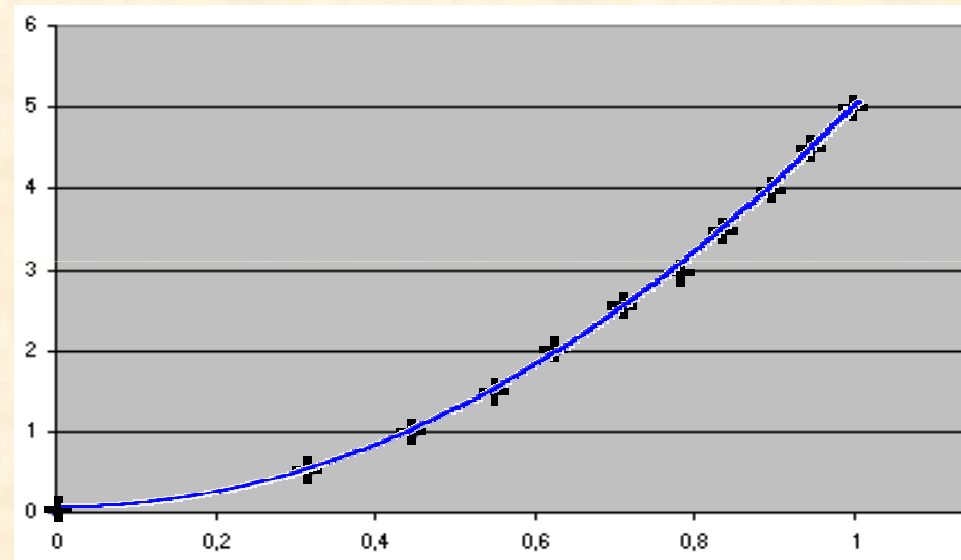
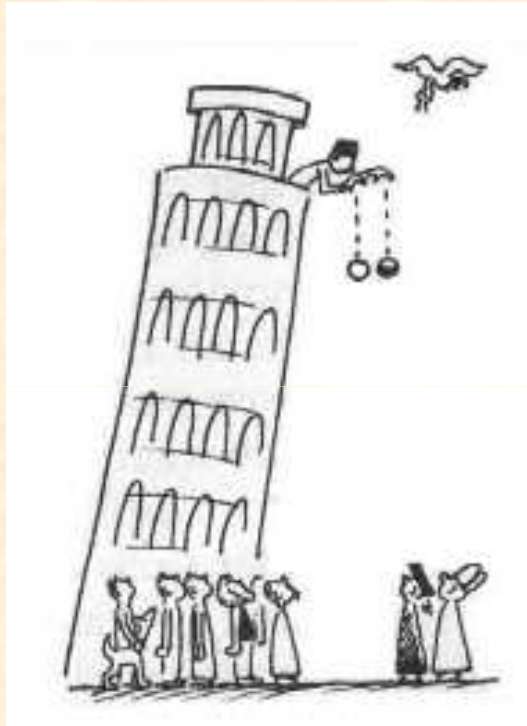
Pour interpoler...

Pour extrapoler

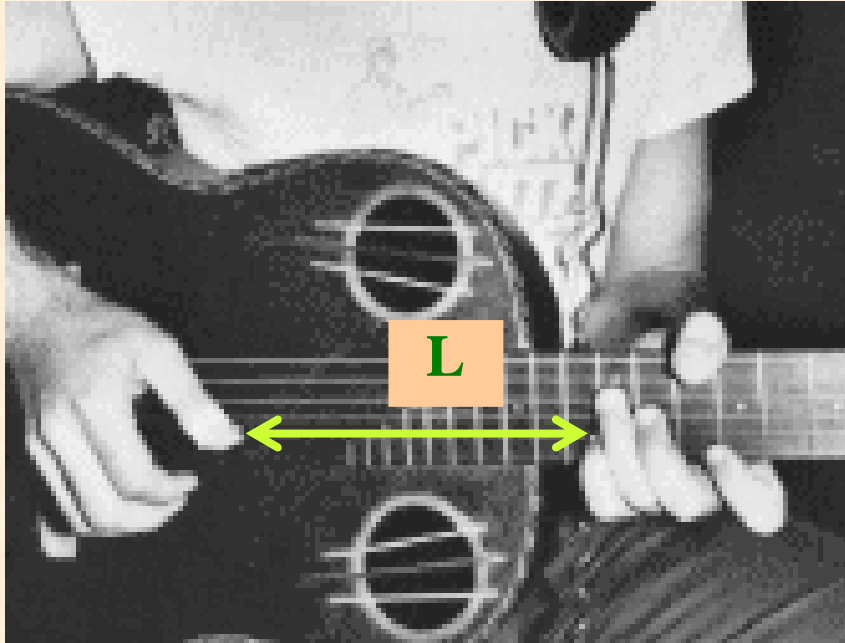
Taux de croissance de l'économie entre 1969 et 1999
mesuré en variation annuelle du PIB



Pour quantifier une dépendance



temps (en s)	0	0,32	0,45	0,55	0,63	0,71	0,78	0,84	0,9	0,95	1
distance (en m)	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5



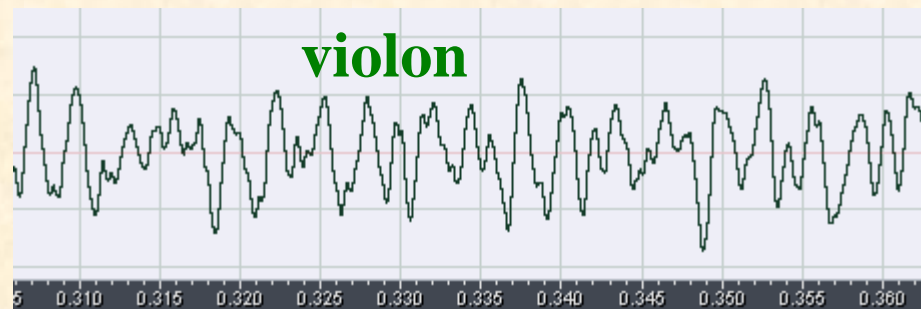
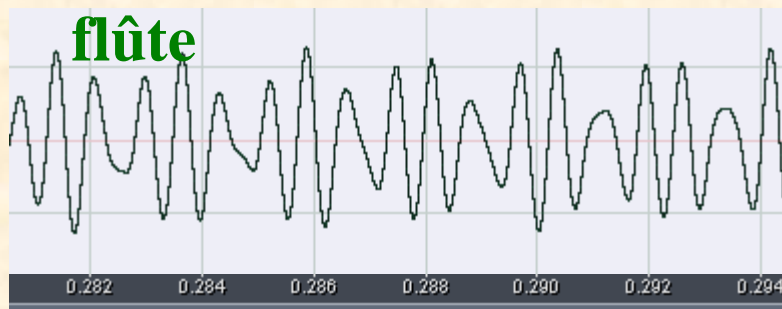
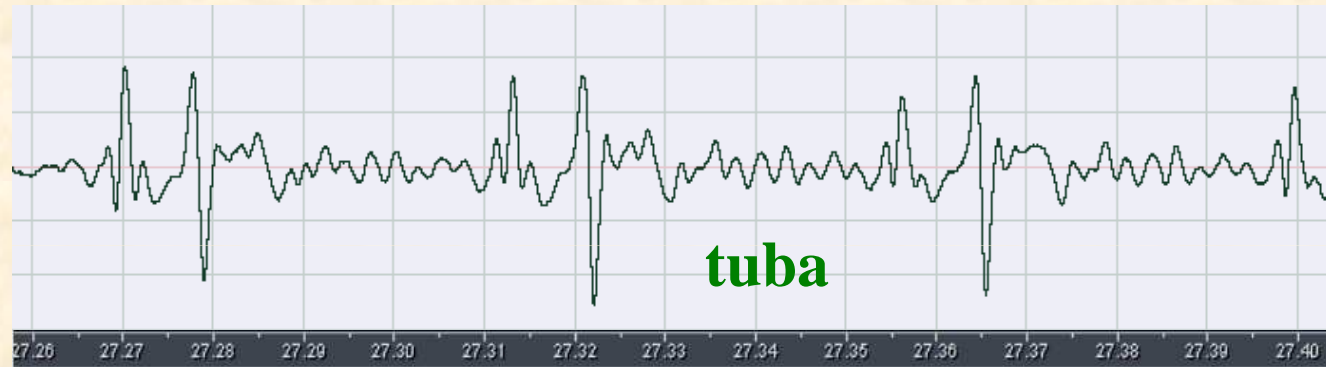
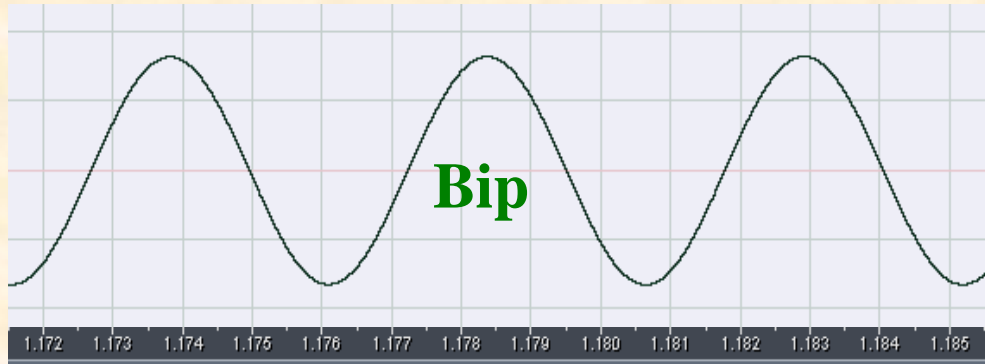
Pour quantifier
une dépendance

k : tension de la
corde (en Newtons)

$$f = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{\mu}} \times \frac{1}{L}$$

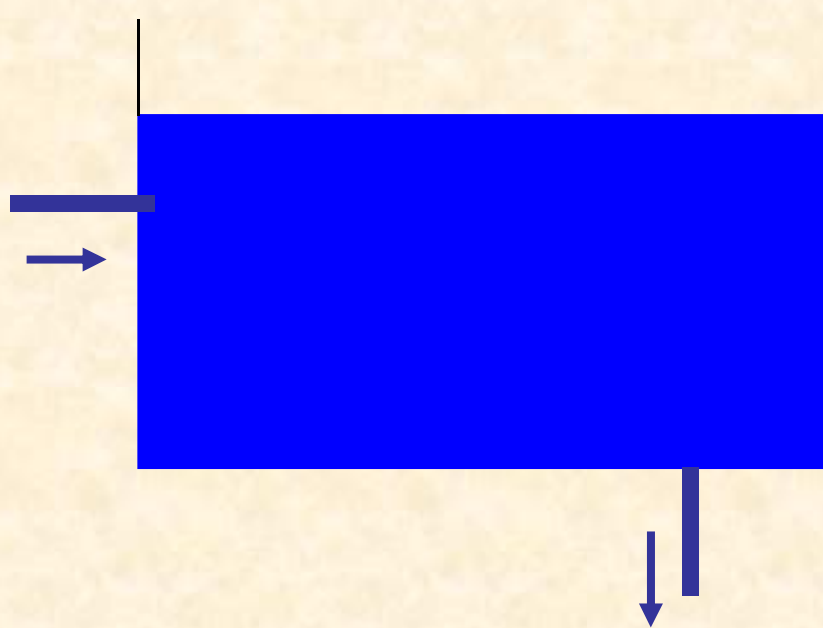
f : fréquence du
son (en Hertz)

μ : masse linéique
de la corde (en kg/m)



Pour décrire un phénomène périodique

Pour modéliser une situation...



***Écoulement de débit constant
contenant un pourcentage
constant d'un indicateur...***



Un "bouton" d'uranium 235, isotope radioactif de l'uranium, utilisé comme combustible dans les réacteurs nucléaires et comme explosif dans les armes nucléaires. La masse de ce "bouton" est environ 4,5 kg et son prix environ 200 000 \$.

I- Etude écologique : bilan

Certaines techniques enseignées en mathématiques se retrouvent « dans la vie courante » :

- Elles consistent à résoudre ces problèmes à l'aide de **tableaux de données ou de graphiques**
- Plus rarement, l'algèbre est utilisé pour des **calculs d'images** (non formulé en ces termes !)

I- Etude écologique : bilan

Certaines techniques enseignées en mathématiques se retrouvent dans les sciences expérimentales :

- **Le calcul des physiciens** utilise de nombreuses lettres chose rare en mathématiques au collège et au lycée et nécessite l'expression d'une quantité en fonction d'une ou plusieurs autres.
- L'élaboration de lois se fait à travers la recherche de **proportionnalité** (courbes de tendance sur tableur,...)
- ...

I- Etude écologique : bilan

Certaines techniques, le vocabulaire, .. enseignés en mathématiques ne vivent pas hors de la discipline :

- Les techniques **algébriques** de recherche d'extrema, de variations, voire même la résolution d'équations...

... **En particulier parce que la notion de valeur exacte n'a de sens qu'en mathématiques !**

- Le **vocabulaire** (image, antécédent, ..) ;

- Les notations du type **$f(x)$** ;

- ...

**Pourquoi les enseigner ?
A quel niveau ? (A qui)
A quel moment ?**

I- Etude écologique : bilan

Pour autant, ces techniques, vocabulaire, ... et la théorie produisent des résultats **qui ont de multiples applications mais qui sont d'un abord parfois difficile !**

- **modélisation** : *économie, lois physiques,...*
- **étalonnage** : *s'appuyant sur la bijectivité, les variations, les propriétés algébriques des fonctions utilisées.)*
- ...

Pourquoi les enseigner ?

A quel niveau ? (A qui)

A quel moment ?

II- Étude historique

II - Survol historique

- le principe de la notion de fonction préexiste dans les tables numériques (dès les Babyloniens) ;
- l'étude de phénomènes naturels a été le point de départ au XIV^{ème} de la construction du concept via des procédés de calcul (formules, puis plus tard séries) ;
- les premières définitions données par Leibniz étaient rendues nécessaires par le contexte qu'il exposait (détermination de tangentes) ;
- le calcul différentiel a pu se développer sans que la notion de fonction soit clairement définie ;
- le développement de la notion de fonction s'est fait par des considérations extra mathématiques.

III- Histoire de l'enseignement de la notion de fonction

III- L'enseignement des fonctions

L'introduction des fonctions dans l'enseignement en France au début du XXème siècle fait partie d'un mouvement européen qui amène la création de la CIEM ; la notion de fonction, "base de toute étude de phénomènes naturels, et sa représentation graphique" apparaît dans les classes préparant le baccalauréat.

Parmi les contenus : calcul infinitésimal, dérivées de fonctions polynomiales, rationnelles, trigonométriques, exponentielles, calcul intégral.

Cet enseignement peut vivre grâce aux « mathématiques mixtes » : astronomie, mécanique, cinématique ... font partie des programmes de mathématiques et sont enseignées par le professeur de mathématiques...

B- Parcours poitevin sur les fonctions

Organiser l'enseignement d'un niveau autour de questions "dignes d'intérêt"

Ce sont des questions visant à résoudre une classe générale de problèmes mathématiques **qui se posent ou se sont posées** au Hommes suite à des influences **externes ou internes** aux mathématiques. Ces questions sont censées :

- générer de nombreuses sous questions et des réponses ;
- faire rencontrer de nouveaux savoirs au programme ;
- mettre en œuvre si possible des connaissances antérieures ;
- permettre l'élaboration d'au moins un parcours au cours duquel on va répondre, au niveau concerné, à la question.

Types de tâches : une classification possible

- **Optimiser** une quantité
- **Décrire** la dépendance entre deux quantités
- **Comparer** plusieurs quantités
- **Modéliser** une situation
- **Estimer** une quantité (interpolation, extrapolation,..)
- ...

Un exemple de parcours...

document utilisé avec les élèves

**L'enchaînement des activités vous paraît-il
baliser le parcours en donnant des
éléments de réponses aux questions ?**

Début de l'historique : traces écrites avec les élèves

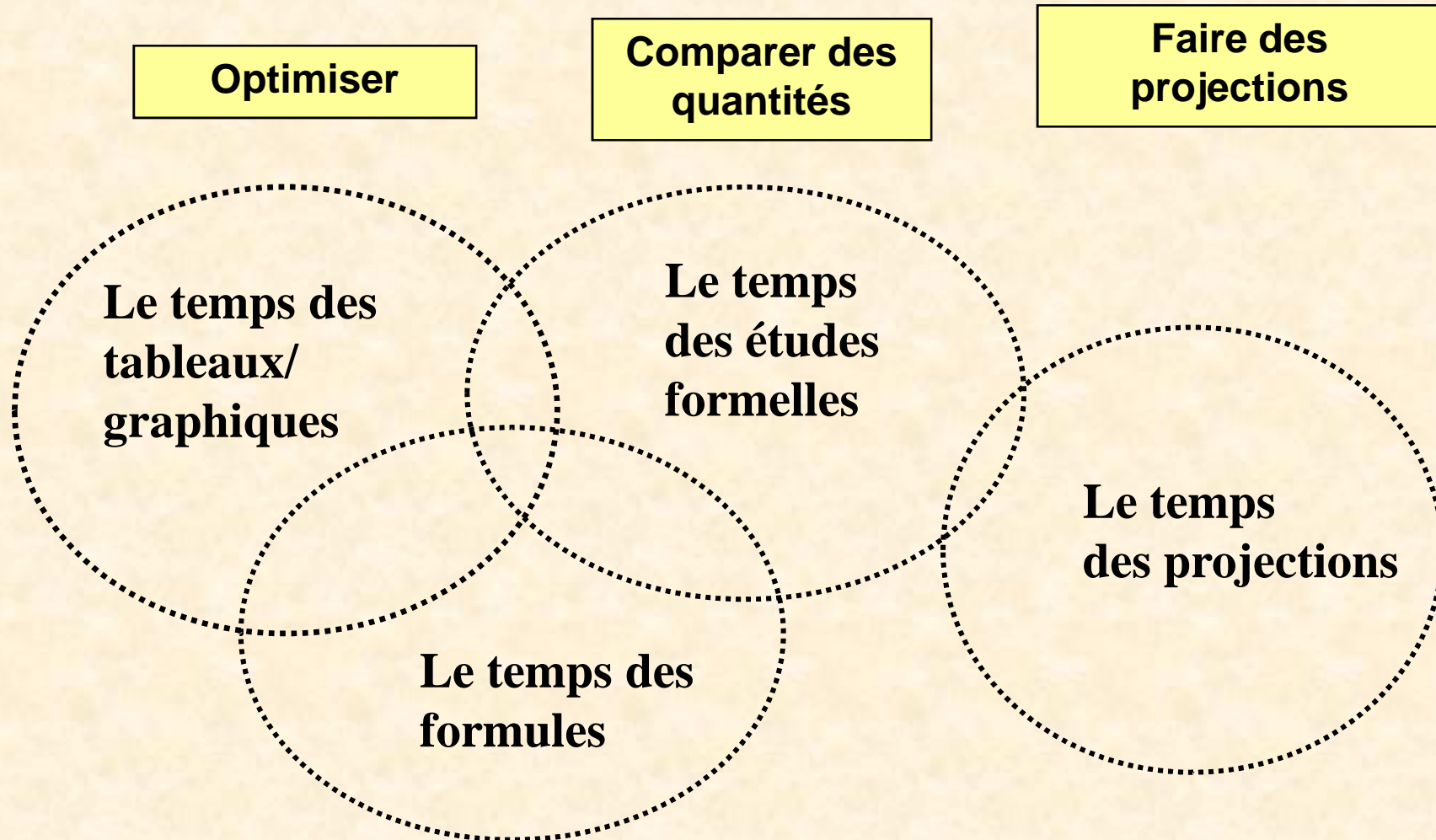
Nous allons répondre dans ce thème à deux questions :

- Comment optimiser une quantité ?
- Comment déterminer une quantité à partir d'une autre ?

□ Bilan de l'activité 1 :

- ❖ Une étude mathématique permet de modéliser une situation avec des outils (tableau, graphique,...) permettant d'argumenter pour savoir quand une quantité est optimale (minimale ou maximale) ou encore pour déterminer une quantité à partir d'une autre
- ❖ Si un tableau de valeurs est peu *explicite* ou peu *lisible*, une courbe offre
 - une *visualisation* de l'évolution d'un phénomène ;
 - un moyen pour *estimer* la valeur d'une quantité à partir d'une autre.

Organisation des parcours



Et sur l'année ?...

Un parcours d'étude sur...	Questions « dignes d'intérêt » génératrices de connaissances :
... les statistiques	<p>Comment résumer une série de données ?</p> <p>Comment situer un individu dans une population ?</p>
... les fonctions	<p>Comment optimiser une quantité ?</p> <p>Comment faire une projection à partir de données</p> <p>Comment comparer deux quantités ?</p>
... la géométrie plane	<p>Comment construire une figure devant respecter des conditions ?</p> <p>Comment juger de l'exactitude d'une méthode de construction ?</p> <p>Comment ramener une démonstration en géométrie à un problème de calcul ?</p>
... la géométrie dans l'espace	<p>Comment représenter un solide dans le plan ?</p>

Conclusions provisoires

L'organisation d'un parcours permet :

- de voir que les techniques (ici : graphiques, formules, étude formelle) ne se substituent pas les unes aux autres mais que leur domaine de validité est différent.
- d'étudier une question digne d'intérêt sur un temps long, balisé par des études à l'issue desquelles les élèves doivent **accepter l'intérêt** des techniques travaillées.

S'ils adhèrent globalement, les élèves sont parfois déboussolés par cet enseignement "minoritaire" ; leur ambition (et celle des parents) reste la réussite scolaire.

Conclusions provisoires

- La recherche des raisons d'être de l'enseignement des notions **n'est pas évidente** car les programmes successifs les **cachent**.
- La multiplicité des notions enseignées, le saupoudrage des notions sur les niveaux ne nous facilitent pas la tâche
- Nous avons engagé un travail long et difficile mais vital nous semble-t-il et qui concerne **toute la profession !**

... Pour optimiser*



*** Être optimiste ?**



Irem de Poitiers