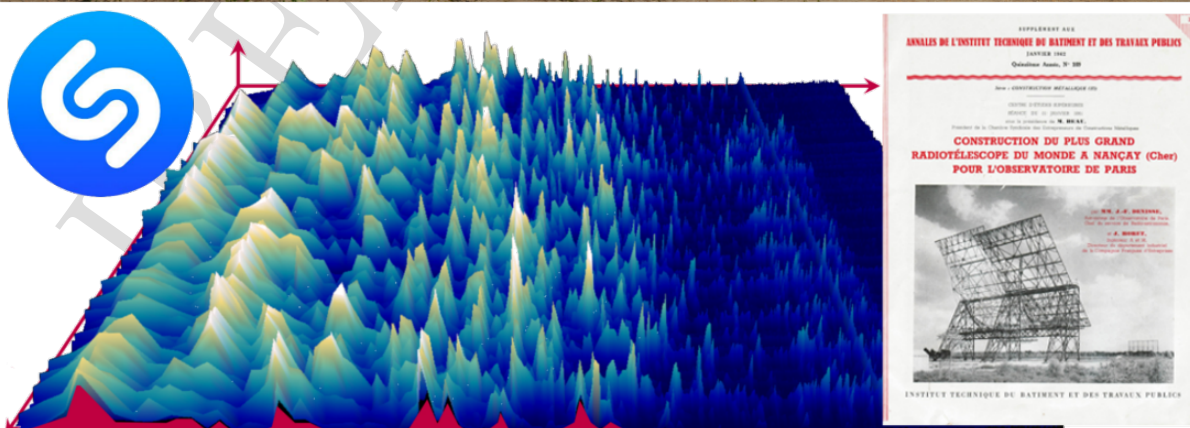


Mathématiques vivantes au lycée (Fascicule 3)

Les ondes : de *Shazam*... ... aux étoiles



IREM&S Poitiers

Les mathématiques vivantes au lycée
Fascicule 3

**LES ONDES : DE *SHAZAM* AUX
ÉTOILES**

Par le groupe Lycée de l'IREM&S de Poitiers

Ce travail s'inscrit dans le cadre d'une recherche initiée par la commission Inter IREM Didactique.

IREM&S Poitiers

Table des matières

A. Comment les instruments du site de radioastronomie de Nançay captent-ils les informations de l'Univers	3
1. Organisation didactique du parcours	5
2. Organisation mathématique du parcours	9
3. Déroulement d'un parcours réalisé en classe	12
4. Gestion de la classe	22
5. Un exemple de parcours réalisé en classe	37
6. Exercices	39
Bibliographie de la partie A.	44
 B. Enseigner les fonctions trigonométriques pour comprendre l'application <i>Shazam</i>	 45
1. Les programmes	47
2. Synopsis du parcours	49
3. <i>Shazam</i> : l'enquête	49
4. <i>Shazam</i> : énoncé de l'étude	50
5. <i>Shazam</i> : gestion de l'étude	51
6. Retour sur le fonctionnement de Shazam	57
7. Conclusion	61
8. Banque d'exercices	62
 C. Annexes	 73
L'enseignement des mathématiques par parcours	74
Bibliographie : textes de Yves Chevallard	75
Bibliographie : publications du groupe lycée de l'IREM de Poitiers	76
 D. Pour expérimenter	 77

IREM&S Poitiers

Introduction

La réforme du lycée général et technologique en bouleverse à la fois la structure et les contenus enseignés. Si les deux articles de la présente brochure ont été testés en classe et écrits avant cette réforme, ils ont été adaptés à la lueur des nouveaux programmes publiés en janvier 2019. Ce sont deux propositions d'enseignement par parcours : organisations particulières de séquences en classe, alternatives aux traditionnels chapitres. Cet enseignement par parcours a pour but est de mettre en avant des questions scientifiques qui justifient et éclairent l'enseignement de notions au programme¹.

La première partie est en quelque sorte une nouvelle version d'un parcours ayant pour but de comprendre la propriété de réflexion d'ondes sur différentes surfaces, parcours déjà détaillé dans une brochure antérieure². On trouvera ici une proposition d'enseignement facilement compatible avec les nouveaux programmes de spécialité mathématiques de première générale, proposition qui trouve ici une motivation supplémentaire via son lien avec un établissement scientifique : la station de radioastronomie de Nançay.

La seconde partie sur le fonctionnement de *Shazam* était initialement prévue pour la classe de terminale S, potentiellement en lien avec le programme de spécialité de physique-chimie. Les fonctions trigonométriques apparaissent avec la réforme en spécialité de première, alors que les liens entre mathématiques et musique sont clairement annoncés dans l'un des quatre thèmes de l'enseignement scientifique du tronc commun. Certes, le parcours proposé ici sur *Shazam* n'est pas transposable *in extenso* dans l'un ou l'autre de ces enseignements de première générale mais on pourra en extraire des éléments soit pour introduire les fonctions sinus et cosinus en spécialité, soit pour enrichir le thème « son et musique » de l'enseignement scientifique où les courbes de fonctions périodiques permettent de modéliser le signal sonore. Dans ce même thème, les nombres constituent des objets dont la nature permet de comprendre la construction des gammes musicales, montrant que les notions mathématiques sont parfois irremplaçables pour comprendre un phénomène scientifique.

C'est exactement le but qu'un enseignement par parcours tente d'atteindre.

Bonne lecture

¹ Voir la partie sur l'enseignement par parcours page 74 et la bibliographie page 75 où sont regroupées quelques références à des textes de Yves Chevallard

² Voir la brochure *Enseigner les mathématiques en première S : trois parcours sur l'analyse et la géométrie analytique* [6].

IREM&S Poitiers

Partie A.

Comment les instruments du site de radioastronomie de Nançay captent-ils les informations en provenance de l'Univers ?

Présentation générale du parcours

À Nançay, en Sologne, se trouve une station d'observation de l'Univers. Cette station comporte de nombreux instruments de radioastronomie¹ dont :

- un des plus grands radiotélescopes comportant un miroir plan, un miroir sphérique et un “chariot focal” permettant d'observer des objets lointains ;



- un réseau de quarante sept antennes paraboliques formant un radiohéliographe permettant d'observer le Soleil ;



- cent quarante quatre antennes formant un réseau dit “décamétrique” dédié à l'observation de phénomènes électromagnétiques émanant du Soleil ou de Jupiter ;
- des antennes liées à un réseau européen (LOFAR) permettant l'étude de pulsars, d'étoiles éruptives, de planètes et exoplanètes, la détection des rayons cosmiques de très haute énergie.

La forme et la nature des “miroirs” utilisés posent alors de nombreuses questions dont :

- Comment une structure grillagée peut-elle réfléchir des ondes ?
- Pourquoi utilise-t-on différentes surfaces pour ces “miroirs” (plane, sphérique, parabolique) ?

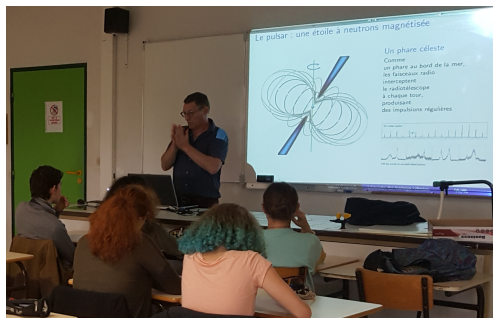
Pour répondre en partie à la première question sur la surface grillagée, nous avons choisi de participer avec nos élèves de première à un atelier lors d'une visite au *Pôle des étoiles*².

Le parcours d'enseignement qui va être décrit a permis, lui, de donner des éléments de réponse à la deuxième question sur la forme des miroirs et d'aborder la géométrie repérée (équations de droites, de cercles) ainsi que le second degré.

¹ Pour une description plus précise de ces instruments :
<https://www.obs-nancay.fr/-Instruments-.html?lang=fr> [13]

² Lors de cette visite, nous avons suivi une séance au planétarium du Pôle des étoiles, des ateliers sur le calcul de la distance des Céphéides et sur l'histoire des instruments d'observation de l'Univers.

Pour clore ce parcours, Ismaël COGNARD³, astrophysicien travaillant au laboratoire LPC2E (CNRS et Université d'Orléans) et responsable du grand radio-télescope est venu faire une conférence d'une demi-journée. Dans un premier temps, il a présenté son parcours universitaire et son sujet de recherche⁴. Puis, sur deux heures, il a proposé des travaux dirigés sur la dispersion et la distance du pulsar du Crabe ainsi que sur l'expansion et l'âge de la Nébuleuse du Crabe.



1. Organisation didactique du parcours

Pour apporter une réponse à la question « Pourquoi utilise-t-on différentes surfaces pour ces « miroirs » (plan, sphérique, parabolique) ? », nous avons balisé un parcours qui part des connaissances des élèves sur la réflexion d'une onde sur un plan, puis s'étend à la réflexion sur une surface courbe (sphère, paraboloïde). Nous l'avons conçu en plusieurs temps : trois enquêtes, trois études faites en classe et un temps de conclusion.

a. Énoncés des enquêtes et des études

Premier temps

Enquête : le *Pôle des étoiles*

1. Qu'est ce que le *Pôle des étoiles* ?
2. Quels types de miroirs rencontre-t-on sur ce site ?
3. Pourquoi le mot « miroir » ? En quelle matière ces miroirs sont-ils conçus ?

Deuxième temps

Enquête : réflexion sur un miroir plan

Cette étude, menée en utilisant la modélisation sur *GeoGebra*, conduit à institutionnaliser les connaissances sur les équations de droites.

Comment se réfléchit un rayon sur un miroir plan ?

Quelle loi d'optique permet de justifier la réponse ?

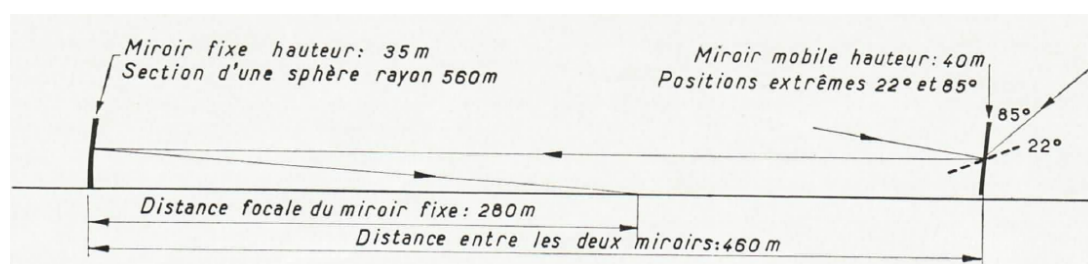
³ Voir le site <http://lpc2e.cnrs-orleans.fr/~icognard/> [1]

⁴ Étude des pulsars millisecondes, et en particulier recherche de la signature des ondes gravitationnelles émises par des trous noirs binaires super-massifs installés au centre de certaines galaxies.

Troisième temps

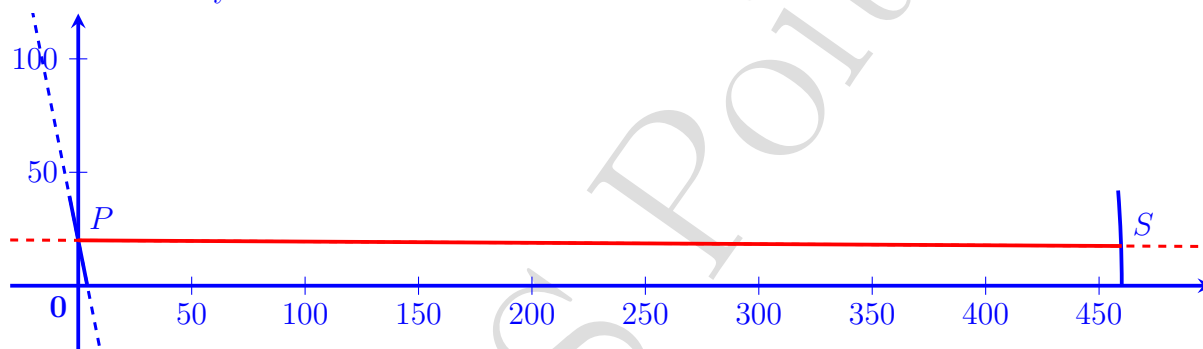
Étude 1 : réflexion sur un miroir plan

Voici le schéma de principe du radiotélescope (élévation)⁵.



Le miroir plan reçoit en P un rayon issu d'un objet et renvoie un rayon réfléchi vers le miroir circulaire en S .

1. Dans la situation suivante où $[PS]$ est le rayon réfléchi par le miroir plan en P , construire le rayon incident.



2. Compléter le fichier *GeoGebra* appelé *Miroir_plan.ggb* et retrouver les résultats donnés dans la fenêtre *Algèbre* par *GeoGebra* pour les rayons incident et réfléchi.

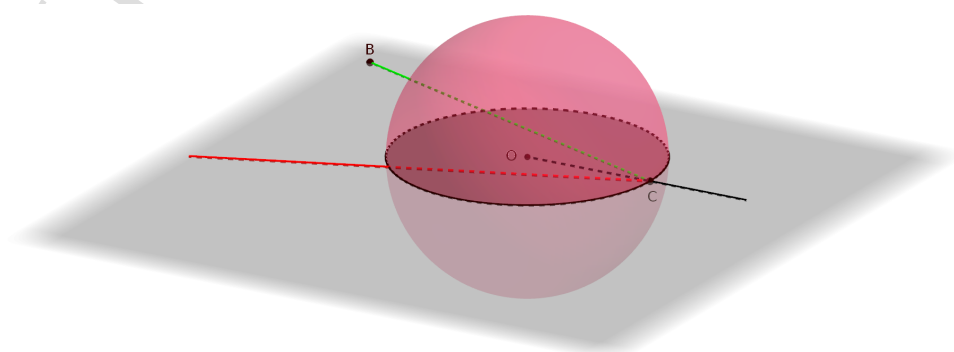
Quatrième temps

Étude 2 : réflexion sur un miroir sphérique

Cette étude comporte plusieurs parties entrecoupées de moments de cours. Elle conduit à institutionnaliser les connaissances sur les équations de cercles et les équations du second degré.

Partie A : construction à la règle et au compas

Un miroir sphérique de centre O reçoit en C un rayon issu de B . Par la suite on se place dans le plan passant par B , C et O non alignés.



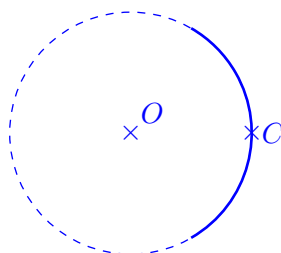
⁵ Extrait des *Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics*, n° 169, p 73 [12].

Partie A.

1. Réflexion sur le grand miroir sphérique

Construire le rayon réfléchi du rayon incident (BC) . Justifier cette construction en argumentant à l'aide de la loi d'optique rappelée précédemment.

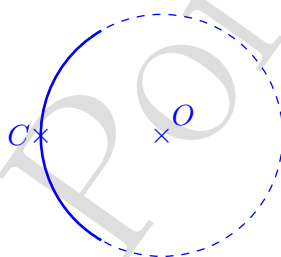
$\times B$



Expliquer les étapes de la construction.

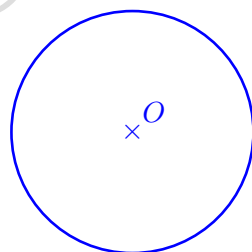
2. Rayon se réfléchissant sur la partie extérieure (même question qu'auparavant).

$\times B$



3. Recherche des rayons limites

$\times B$



Déterminer les rayons issus de B qui ne se réfléchissent pas.

Partie B : rayon réfléchi

Dans un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O , de rayon 6 et les points $B(6 ; 10)$ et $C(4,8 ; 3,6)$.

1. Construire le rayon réfléchi du rayon (BC) avec *GeoGebra* (on vérifiera que C appartient à $\mathcal{C}_1$ et que B est extérieur à $\mathcal{C}_1$).
2. Retrouver l'équation du rayon réfléchi donné par *GeoGebra*.

Partie C : rayons ne se réfléchissant pas

Soit le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre O et de rayon 6 et $B_1(6 ; 10)$.

1. Déterminer avec *GeoGebra* les rayons issus de B_1 qui ne se réfléchissent pas sur le miroir.
Justifier tous les résultats qui apparaissent dans la fenêtre *algèbre*.
2. Faire de même pour les rayons issus de $B_2(18 ; 18)$.

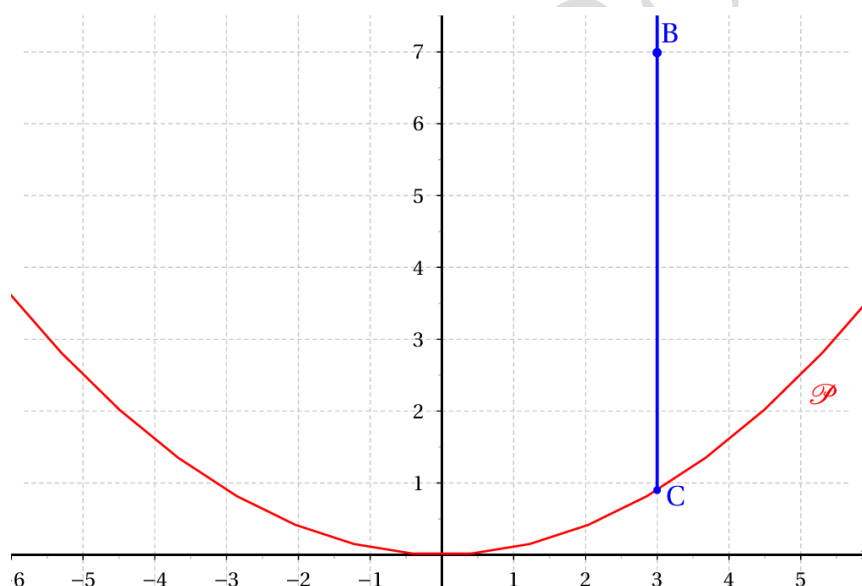
Cinquième tempsEnquête : réflexion sur un miroir parabolique

Cette étude amène à préciser la notion de tangente à une parabole comme sécante (non parallèle à son axe) la coupant en un seul point.

Comment fonctionne une antenne parabolique ?

Sixième tempsÉtude 3 : réflexion sur un miroir parabolique

1. Construire sur le schéma ci-dessous le rayon réfléchi du rayon incident issu de B parallèle à l'axe de la parabole. Justifier.
2. Cette parabole a pour équation $y = 0,1x^2$.
Déterminer une équation du rayon réfléchi de celui issu de $B(3 ; 7)$, parallèle à l'axe de la parabole. Justifier.

Septième tempsConclusion : explication du fonctionnement d'une antenne parabolique

On justifie la convergence des rayons réfléchis vers le foyer de la parabole, pour des rayons incidents parallèles à l'axe de la parabole et l'arrivée simultanée au foyer de signaux émis au même instant.

2. Organisation mathématique du parcours

a. Programme de première générale

B0 Algèbre

• Objectifs

L'étude des fonctions polynômes du second degré réactive les connaissances acquises en seconde (fonction carré, identités remarquables) qu'elle permet de consolider. Il est important de diversifier les registres (algébrique, graphique) et de mettre en valeur les interactions avec l'ensemble du programme : problèmes variés, notamment d'origine géométrique, se ramenant à une équation du second degré [...]

Les élèves doivent savoir qu'une fonction polynôme du second degré admet une forme canonique, et être capables de la déterminer dans des cas simples à l'aide de l'identité $x^2 + 2ax = (x + a)^2 - a^2$ (méthode de complétion du carré). Le calcul effectif de la forme canonique dans le cas général n'est pas un attendu du programme.

• Équations, fonctions polynômes du second degré

Contenus

- Fonction polynôme du second degré donnée sous forme factorisée. Racines, signe, expression de la somme et du produit des racines.
- Forme canonique d'une fonction polynôme du second degré. Discriminant. Factorisation éventuelle. Résolution d'une équation du second degré. Signe.

Capacités attendues

- [...]
- Déterminer les fonctions polynômes du second degré s'annulant en deux nombres réels distincts.
- Factoriser une fonction polynôme du second degré, en diversifiant les stratégies : racine évidente, détection des racines par leur somme et leur produit, identité remarquable, application des formules générales.
- Choisir une forme adaptée (développée réduite, canonique, factorisée) d'une fonction polynôme du second degré dans le cadre de la résolution d'un problème (équation, inéquation, optimisation, variations).

Démonstration

- Résolution de l'équation du second degré.

Approfondissements possibles

- [...]
- Déterminer deux nombres réels connaissant leur somme s et leur produit p comme racines de la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - sx + p$.

B0 Géométrie

• Objectifs

L'enseignement est organisé autour des objectifs suivants :

- donner de nouveaux outils efficaces en vue de la résolution de problèmes géométriques, du point de vue métrique (produit scalaire) ;
- enrichir la géométrie repérée de manière à pouvoir traiter des problèmes faisant intervenir l'orthogonalité.

• Histoire des mathématiques

[...]

Les cercles font partie des plus vieux objets mathématiques. La caractérisation du cercle de diamètre AB comme ensemble des points M tels que le triangle AMB soit rectangle en M semble remonter à Thalès. Mais ce n'est qu'au XVII^e siècle que Descartes élabore la méthode des coordonnées et écrit l'équation d'un cercle en repère orthonormé.

• Géométrie repérée

Dans cette section, le plan est rapporté à un repère orthonormé.

Contenus

- Vecteur normal à une droite. Le vecteur de coordonnées $(a ; b)$ est normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$. Le vecteur $(-b ; a)$ en est un vecteur directeur.
- Équation de cercle.
- Parabole représentative d'une fonction polynôme du second degré. Axe de symétrie, sommet.

Capacités attendues

- Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un point et un vecteur normal.
- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Déterminer et utiliser l'équation d'un cercle donné par son centre et son rayon.
- Reconnaître une équation de cercle, déterminer centre et rayon.
- Déterminer l'axe de symétrie et le sommet d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.
- [...]

Approfondissements possibles

- Recherche de l'ensemble des points équidistants de l'axe des abscisses et d'un point donné.
- Déterminer l'intersection d'un cercle ou d'une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ avec une droite parallèle à un axe.

Remarques

- On travaillera en considérant les coefficients directeur comme étant le rapport entre le différences des ordonnées et la différence des abscisses. Le lien avec les vecteurs sera fait ultérieurement.
On obtiendra également une condition de perpendicularité de deux droites qui permettra, sans produit scalaire, de démontrer que « $\vec{u} \perp \vec{v} \iff x_{\vec{u}}x_{\vec{v}} + y_{\vec{u}}y_{\vec{v}} = 0$ » et une première approche de la dérivée par les sécantes.
- Les points du BO que nous avons écrits en violet ne faisaient pas partie du programme de première S ; aussi n'ont-ils pas été abordés lors de la mise en œuvre de ce parcours. Ils peuvent cependant aisément être traités en exercices.
- Sans évoquer le côté fonctionnel, on abordera la notion de tangente comme position limite des sécantes. On aura alors une première approche de la dérivation.

b. Notions mathématiques abordées lors des études

Ce parcours permet d'être confronté à des situations où la recherche de tangentes est une nécessité. Le point de vue choisi est donc clairement géométrique. Les fonctions ne sont présentes que parce qu'elles déterminent dans le plan repéré les objets géométriques que sont les paraboles (à condition d'avoir fait un choix adéquat pour les axes). C'est en tant qu'équations de courbes que les relations algébriques prennent ici un sens. On fait ainsi de la géométrie analytique qui s'apparente à celle de Descartes⁶.

Pour cela nous nous plaçons naturellement dans un repère orthonormé, ce qui permet de travailler les équations de cercles. La représentation des objets géométriques avec *GeoGebra* amène à réfléchir plus globalement sur la façon dont un logiciel traite les objets géométriques. Les équations caractérisant ces objets apparaissent automatiquement dans la fenêtre *Algèbre* du logiciel et on peut alors expliquer leur signification. De plus, la recherche des tangentes à la parabole à la manière d'Archimède ou de Descartes amène à résoudre des équations, en particulier du second degré.

D'un point de vue mathématique, l'étude du fonctionnement d'une antenne parabolique conduit à aborder des propriétés de la parabole et permet de définir la tangente à une courbe autre que le cercle. Mais cette définition, liée à la forme particulière de la parabole, nécessitera d'être reprise et complétée au moment d'aborder, la notion générale de tangente lors de l'étude de la dérivation.

Les principaux savoir-faire mathématiques abordés dans ce premier parcours sont :

- déterminer une équation de cercle à partir d'éléments caractéristiques ;
- déterminer une équation de droite ;
- déterminer la position relative de deux droites ;
- déterminer la forme canonique d'un trinôme du second degré ;
- résoudre une équation du second degré ;
- déterminer algébriquement les coordonnées des points d'intersection de deux courbes ;
- démontrer qu'une droite est tangente à un cercle, à une parabole.

⁶ Voir la brochure *Enseigner les mathématiques en première S : trois parcours sur l'analyse et la géométrie analytique* [6]

3. Déroulement d'un parcours réalisé en classe

Premier temps

Enquête : le *Pôle des étoiles*

Cette première enquête a pour but :

- de présenter la station d'observation de Nançay qui fera l'objet d'un voyage scolaire ;
- de faire connaître les recherches qui peuvent être menées grâce à ces observations ;
- d'annoncer la venue, plus tard dans l'année, d'un astrophysicien (Ismaël COGNARD) qui présentera son parcours, son métier et fera travailler les élèves sur l'étude du pulsar du Crabe ;
- de préparer les temps d'étude de ce parcours.

Les élèves doivent faire des recherches et en exposer les résultats devant la classe.

Parmi tous les instruments du site, le professeur fait ressortir en particulier le grand radiotélescope et les antennes paraboliques dont les formes plane, sphérique et parabolique induisent nos études.



Maquette du radiotélescope

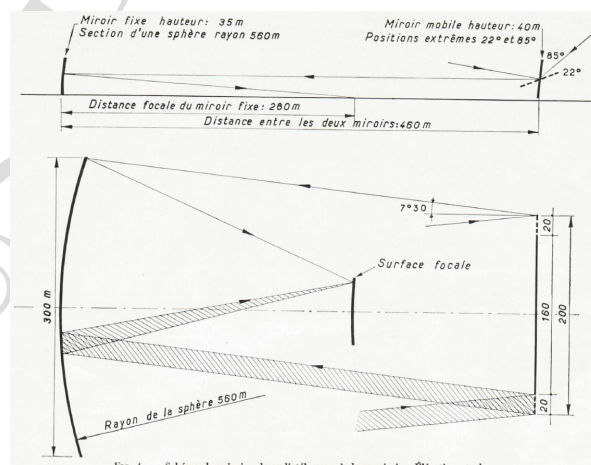


FIG. 1. — Schéma de principe du radiotélescope à deux miroirs. Élévation et plan.

Dimensions du radiotélescope

La structure grillagée des miroirs est abordée et fait l'objet de discussions assez générales sur les longueurs d'onde des rayons émis par les objets observés. Ce point sera approfondi par les collègues de physique-chimie et lors d'un atelier sur les ondes le jour de la visite de la station.

Deuxième temps

Enquête : réflexion sur un miroir plan

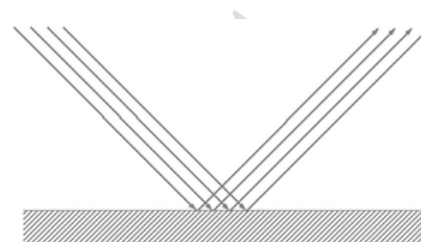
Suite à ces enquêtes l'enseignant peut faire les compléments suivants :

- la réflexion doit être spéculaire (voir ci-dessous) ;
- la réflexion est valable pour toutes les ondes ;
- la réflexion sur une surface plane a lieu dans le plan d'incidence ;
- on peut toujours se ramener dans le plan d'incidence ;
- l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion.

Par cette deuxième enquête, nous souhaitons fixer la *modélisation* : la réflexion est spéculaire et dépend de la forme de la surface de réflexion (plane, circulaire, parabolique). En outre, nous souhaitons insister sur les connaissances acquises en seconde en physique sur la loi de la réflexion de Descartes : notion de plan d'incidence et loi des angles. Nous prévoyons quelques informations supplémentaires, nécessaires pour compléter la synthèse de ces deux enquêtes.

Réflexion spéculaire⁷

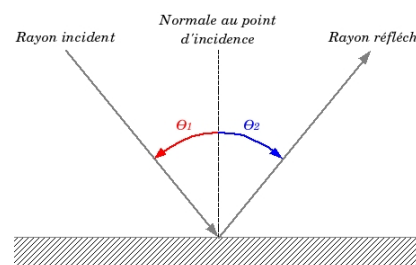
La réflexion est dite spéculaire lorsque le rayon incident donne naissance à un rayon réfléchi unique. Idéalement, l'énergie du rayon incident se retrouve totalement dans le rayon réfléchi, en pratique une partie de l'énergie peut être absorbée ou diffusée au niveau de l'interface.



La qualité de la réflexion⁸ dépend de la qualité de l'interface, dès que la taille des défauts de l'interface est inférieure ou de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde, l'interface tend à devenir parfaitement réfléchissante. C'est pourquoi une surface de métal brut qui diffuse fortement devient parfaitement réfléchissante quand on la polit (on l'abrase jusqu'à ce que la taille des défauts soit comparable à la longueur d'onde de la lumière).

Si l'on construit un miroir pour la lumière visible, la taille des défauts ne doit pas excéder quelques centaines de nanomètres. Pour les ondes radios ou les ondes radars, ces défauts peuvent être de l'ordre de quelques centimètres. Au lieu de construire des miroirs dont la surface métallique est uniforme, on peut se contenter d'une surface plus grossière de type « grillage ».⁹

La réflexion en optique géométrique obéit aux lois de Descartes. Le rayon est dit incident avant d'avoir rencontré la surface réfléchissante, il est dit réfléchi après. Le point de rencontre du rayon incident et de la surface réfléchissante est appelé point d'incidence.



Le plan contenant le rayon incident et la normale à la surface réfléchissante au point d'incidence est dit plan d'incidence.

On appelle angle d'incidence l'angle θ_1 pris entre la normale au point d'incidence et le rayon incident. On appelle angle de réflexion l'angle θ_2 pris entre la normale au point d'incidence et le rayon réfléchi.

Moyennant ces définitions la loi de la réflexion s'énonce ainsi :

- le rayon incident et le rayon réfléchi sont dans le plan d'incidence ;
- $\theta_1 = \theta_2$

Cette loi a été vue par les élèves en seconde en physique, mais seulement dans le cas d'une surface plane. Elle sera à la base de tous les travaux de ce parcours.

⁷ http://fr.wikipedia.org/wiki/Réflexion_optique

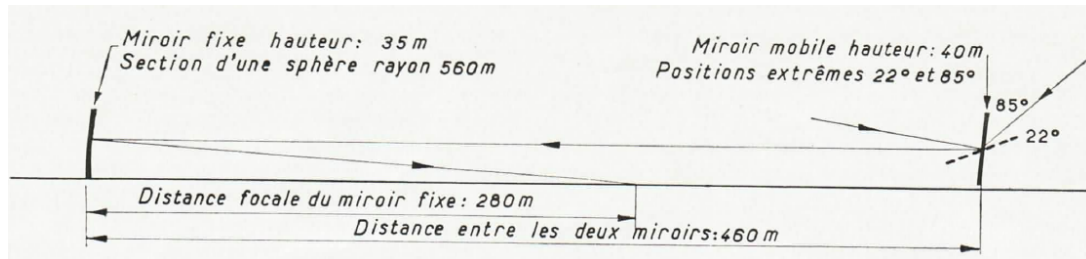
⁸ http://fr.wikipedia.org/wiki/Longueur_d'onde

⁹ https://fr.wikipedia.org/wiki/Lois_de_Snell-Descartes

Troisième temps

Étude 1 : réflexion sur un miroir plan

Voici le schéma de principe du radiotélescope (élévation).



Le miroir plan reçoit en P un rayon issu d'un objet et renvoie un rayon réfléchi vers le miroir circulaire en S .

Le miroir plan a une inclinaison réglable de la verticale (orienté vers le miroir sphérique) à l'horizontale (orienté vers le ciel).

On se pose ici la question de la direction des objets observables lorsque le miroir a une inclinaison donnée et que le rayon réfléchi va du centre du miroir plan à celui du miroir sphérique.

Les nombres utilisés ne sont pas simples à manipuler mais correspondent aux "vraies" données.

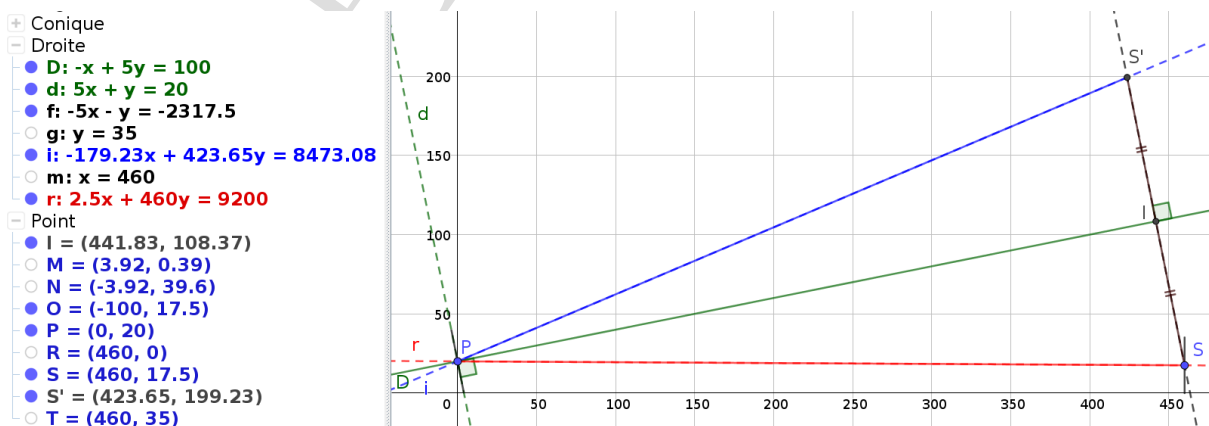
Le problème de la réflexion vers le chariot focal ne se pose pas pour l'instant.

Il est possible de compléter l'étude par la recherche de la déclinaison¹⁰ de l'objet céleste observé au moyen d'un arc-tangente.

Question 1

La réponse à cette question donne une démarche de construction du rayon incident :

- tracer la normale D à la droite d en P ;
- tracer le symétrique S' de S par rapport à D ;
- tracer $[PS']$.



¹⁰ Angle δ mesuré entre l'objet céleste observé et l'équateur, donné par la relation $\delta = \alpha + \phi - 90^\circ$ où ϕ est la latitude et α l'angle d'observation par rapport à l'horizon.

Voir clea-astro.eu/lunap/Coordonnees/CoordActivDeclin.html

Question 2

Pour déterminer une équation du rayon incident, il suffit de calculer les coordonnées de S' symétrique de S par rapport à (D) .

Une analyse avec les élèves doit permettre d'élaborer une démarche :

- calculer une équation de la droite (D) ;
- calculer les coordonnées de S' en remarquant que (SS') est perpendiculaire à (D) et que le milieu de $[SS']$ appartient à (D) .

Les élèves doivent utiliser les équations de droites (cartésiennes ou/et réduites). Nous choisissons ce moment pour revoir et compléter les connaissances par un premier point de cours de géométrie analytique sur :

- Les équations de droites de coefficient directeur m et passant par un point A donné :

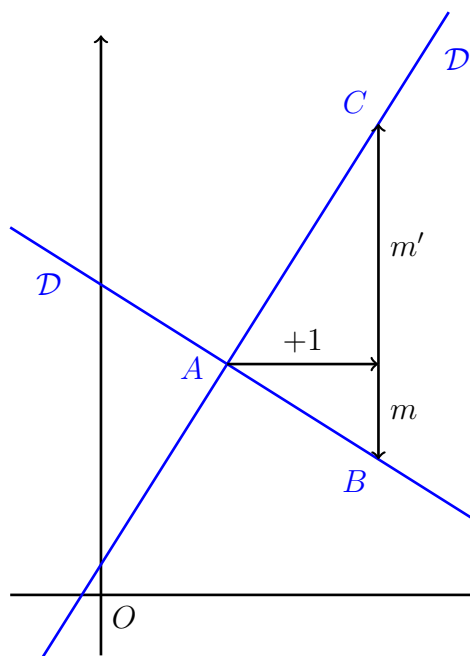
$$y = m(x - x_A) + y_A$$

Cette formule est importante compte tenu de l'objectif visé à plus long terme, à savoir l'équation canonique d'une tangente à une courbe.

- Les équations cartésiennes de droites et les équations réduites.
- Le rôle du coefficient directeur vu comme « pente ».
- Les conditions de parallélisme, d'orthogonalité (en repère orthonormé) de deux droites dont on connaît les équations réduites (bien que non exigible, la condition d'orthogonalité $mm' = -1$ se révèle pratique et rapide à établir).



Démonstration



On se place dans un repère orthonormé.

Soient deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ (de coefficients directeurs respectifs m et m') perpendiculaires et non parallèles aux axes. On note A leur point d'intersection.

On pose $A(a ; b)$. Par définition du coefficient directeur, les points $B(a+1 ; b+m)$ et $C(a+1 ; b+m')$ appartiennent respectivement aux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

On a $AB^2 = 1 + m^2$; $AC^2 = 1 + m'^2$ et $BC^2 = (m' - m)^2$

(on peut utiliser le calcul de distance dans un repère orthonormé).

Dans le triangle ABC rectangle en A , le théorème de Pythagore permet d'écrire $AB^2 + AC^2 = BC^2$ donc $(m' - m)^2 = 1 + m^2 + 1 + m'^2$ et donc $-mm' = 1$ soit $m \times m' = -1$.

Réciproquement, supposons $m \times m' = -1$. On a donc $m \neq 0$, $m' \neq 0$ et m, m' de signes différents.

Les droites ne sont donc pas parallèles aux axes et non parallèles entre elles.

On note A leur point d'intersection et on peut reprendre les calculs précédents pour montrer que ABC est rectangle en A et qu'ainsi, les droites sont perpendiculaires.

- Les coordonnées du milieu d'un segment.
- La résolution de systèmes d'équations pour la recherche de points d'intersection de courbes.

Des exercices didactiques sont alors possibles pour travailler ces techniques :

- Passer des équations cartésiennes aux équations réduites et inversement ;
- Calculer des équations de droites à partir de données diverses ;
- Vérifier parallélisme et orthogonalité de deux droites.

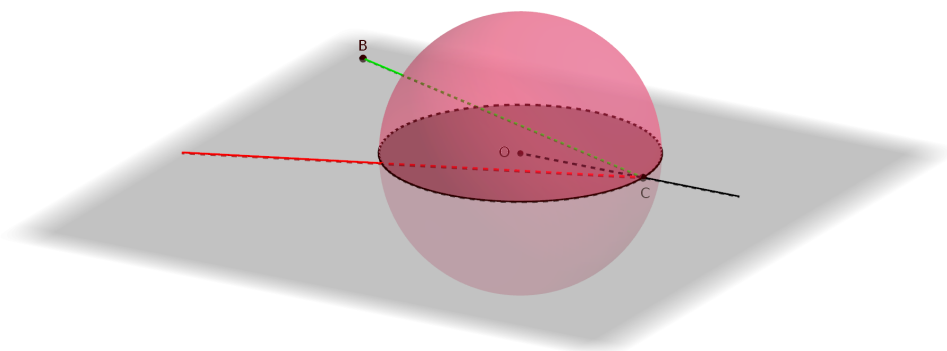
Ces exercices font intervenir des intersections de droites qui permettent de travailler les systèmes de deux équations à deux inconnues et amènent à la recherche, plus générale, d'intersection de deux courbes.

Quatrième temps

Étude 2 : réflexion sur un miroir sphérique

Partie A : construction à la règle et au compas

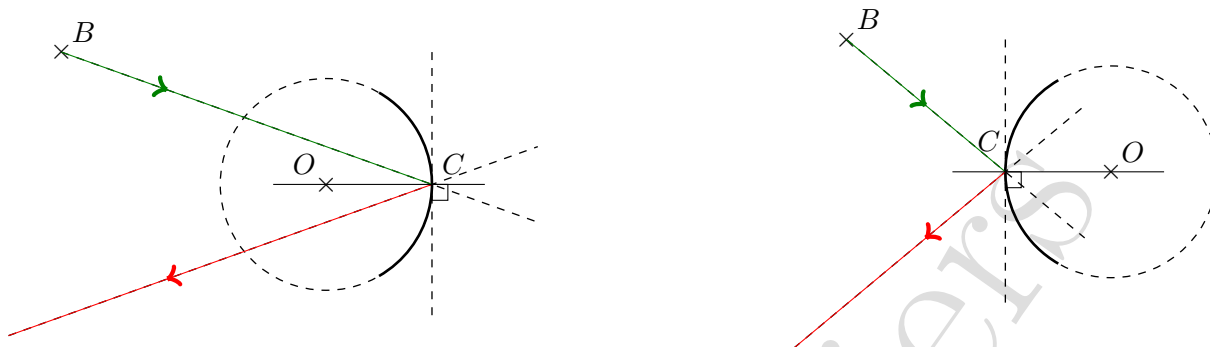
Un miroir sphérique de centre O reçoit en C un rayon issu de B . Par la suite on se place dans le plan passant par B, C et O non alignés.



Le schéma ci-dessus permet de faire comprendre qu'on se ramène à un problème dans le plan en considérant le plan grisé défini par le centre de la sphère et le rayon incident

Questions 1 et 2

Nous souhaitons que les élèves tracent la demi-droite symétrique au rayon incident par rapport au rayon (OC) .



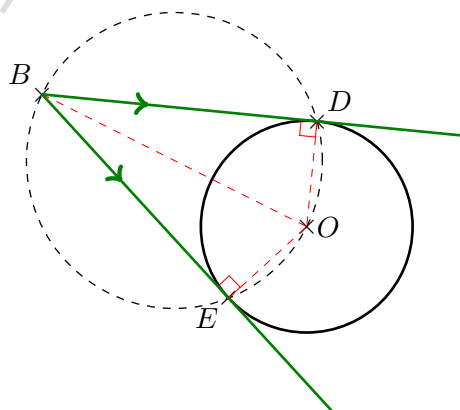
L'argumentation attendue doit faire le lien avec la loi de Snell-Descartes. Une série de zooms successifs autour du point C incite à considérer le cercle comme une infinité de segments infiniment petits¹¹. La tangente peut alors être vue comme la droite joignant deux points infiniment proches, la normale étant une perpendiculaire à cette droite en un de ces deux points. Autrement dit, on peut appliquer la loi de la réflexion si on l'applique localement à la tangente au cercle en C .

La deuxième question permet de remarquer que la construction est la même pour un rayon se réfléchissant sur la partie extérieure.

Question 3

S'étant placé à l'extérieur (en B), les points limites pour lesquels il y a réflexion sont ceux dont sont issues les tangentes au cercle passant par B .

La construction ci-contre est attendue. Elle sera réalisée à la règle et au compas puis, dans un second temps, avec *GeoGebra*.



Partie B : rayon réfléchi

On retrouve ici la situation vue au cours de l'étude 1 en considérant la tangente au cercle en C avec au passage la vérification de l'appartenance d'un point à un cercle (et plus généralement à une courbe).

Partie C : rayons ne se réfléchissant pas

À cette occasion, nous analysons systématiquement ce que le logiciel *GeoGebra* indique dans la fenêtre algèbre.

- si on trace une droite, apparaît dans la fenêtre algèbre une équation du type $ax + by = c$.
- si on trace un cercle, apparaît une équation du type $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

S'interroger sur le lien entre objets géométriques et équations permet d'introduire les représentations cartésiennes des objets géométriques.

¹¹ Conception d'une courbe par le marquis de l'Hospital.

Question 1

Les élèves doivent reconnaître l'équation d'une des tangentes qui est de la forme $x = \alpha$.

Les équations de cercles leur sont inconnues. Ils doivent alors retrouver ces équations, à l'aide de l'enseignant, en se référant à la formule donnant la distance entre deux points. Elles permettront de déduire les coordonnées des points D et E à la fin de cette étude.

Nous ne sous-estimons pas la difficulté, bien réelle, consistant à considérer un ensemble de points comme étant représenté par une équation cartésienne. Cette difficulté apparaît déjà en seconde à propos des équations réduites de droites.

Les équations de cercles permettent de revenir sur cette notion.

La recherche des coordonnées des points D et E conduit à résoudre le système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 34 \end{cases}$$

qui peut se transformer en

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + y^2 - 6x - 10y = 0 \end{cases}$$

ou encore en

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ x = 6 - \frac{5}{3}y \end{cases}$$

La substitution amène à l'équation

$$\frac{34}{9}y^2 - 20y = 0$$

qui peut être résolue à l'aide d'une factorisation.

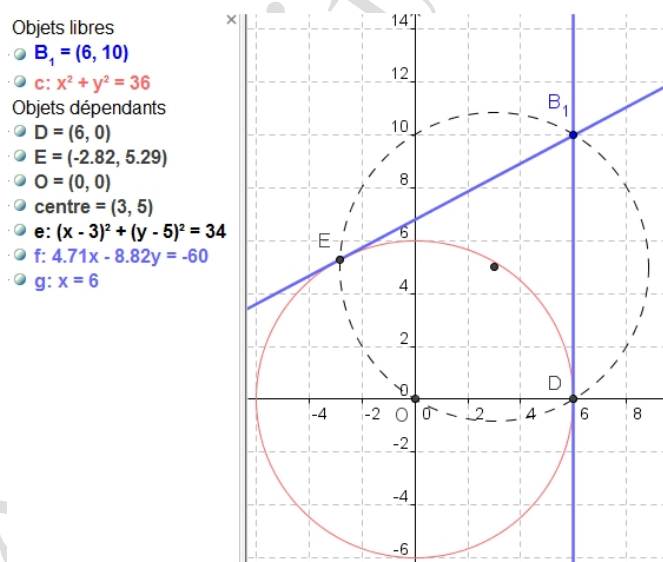
Outre les contenus de géométrie analytique rencontrés, cette étude propose en situation, de nombreux calculs algébriques et littéraux.

Un deuxième point de cours peut être fait, lors de l'étude, sur les équations de cercles.

Le passage de la forme développée $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ à la forme canonique $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$ sur des exemples numériques prépare à la résolution des équations du second degré dans le cas général. On peut alors terminer la résolution de la question 1. Puis des exercices classiques permettent de maîtriser ces techniques.

Question 2

Les élèves doivent réinvestir la méthode vue à la question précédente (recherche d'une équation du cercle de diamètre $[OB_2]$ et calcul des coordonnées des points d'intersection de ce cercle avec le cercle de centre O et de rayon 6).



Partie A.

Les calculs conduisent alors au système :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ (x - 9)^2 + (y - 9)^2 = 162 \end{cases}$$

Puis au système

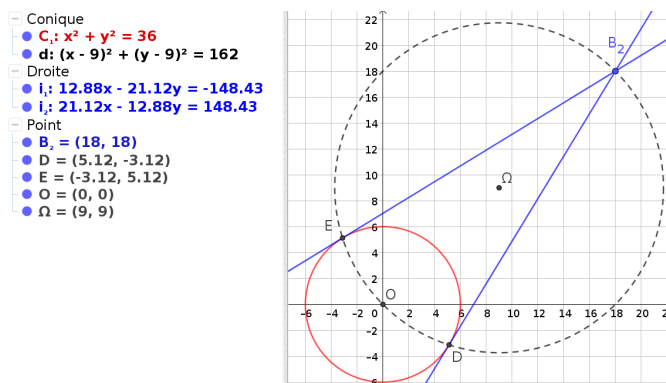
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ x^2 + y^2 - 18x - 18y = 0 \end{cases}$$

ou encore

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{cases} y^2 - 2y - 16 = 0 \\ x = 2 - y \end{cases}$$



Contrairement à la question précédente, les élèves ne savent pas, pour la plupart, factoriser l'expression $y^2 - 2y - 16$.

La résolution de l'équation du second degré peut alors être dirigée par le professeur en utilisant la forme canonique déjà vue pour les cercles.

En bilan, un point de cours sur les équations du second degré est noté. Ce cours ne mentionne que la méthode conduisant à la détermination des racines. Le signe du trinôme ne sera institutionnalisé que plus tard dans l'année dans un parcours sur l'optimisation.

Cinquième temps

Enquête : réflexion sur un miroir parabolique

Le but de cette enquête est de mettre en avant l'existence du foyer qui est le lieu de convergence des rayons réfléchis lorsque l'antenne est bien orientée par rapport à l'objet observé ainsi que la nécessité de définir la tangente à une parabole.

Sixième temps

Étude 3 : réflexion sur un miroir parabolique

La détermination d'une tangente à un cercle est connue des élèves (perpendiculaire à un rayon).

L'étude 3 permet de donner une autre définition de la tangente à une courbe. Pour une parabole, c'est la droite qui passe par un point de celle-ci, qui n'est pas parallèle à son axe et qui ne la coupe qu'en un point.

Comme précédemment, les élèves doivent donner un programme de construction du rayon réfléchi et retrouver les équations de courbes liées à cette construction affichées dans *GeoGebra*.

La surface n'étant pas plane, les élèves doivent de nouveau se demander comment relier cette situation à la loi énoncée par les physiciens sur une surface plane. Contrairement au cercle, aucune symétrie n'apparaît.

Nous prévoyons la même expérience que pour le miroir plan avec du matériel du laboratoire de physique.

Les faisceaux permettent d'illustrer ce qui se passe dans un plan contenant une parabole.

La réponse attendue est le tracé de la normale à la courbe qui peut s'obtenir à l'aide de la tangente. On peut imaginer plusieurs méthodes pour le tracé de la tangente.

Méthode 1

En zoomant autour de C^{12} on ramène localement la courbe à un segment passant par C . La tangente est alors cette droite. Cette première méthode, approchée donne une bonne idée de ce qu'est une approximation affine.

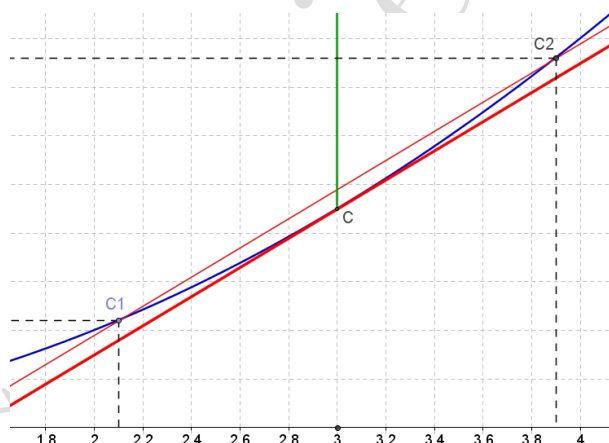
Méthode 2

En faisant, à la manière de DESCARTES, apparaître un cercle tangent à la parabole au point C ; la tangente au cercle en C est la tangente à la parabole. Cette méthode permet de s'appuyer sur des notions connues mais ne sera pas opérationnelle algébriquement.

Méthode 3

On considère deux points C_1 et C_2 sur la parabole de part et d'autre de $C(3 ; 0,9)$ dont les abscisses sont symétriques par rapport à celle de C et on trace la parallèle à (C_1C_2) passant par C^{13} .

La notion mathématique sous-jacente est la dérivée symétrique très utile aux physiciens¹⁴.



Prenons les points $C_1(a - h ; 0,1(a - h)^2)$ et $C_2(a + h ; 0,1(a + h)^2)$.
Le coefficient directeur de (C_1C_2) est $0,2a$.

Ainsi nous obtenons le coefficient directeur exact de la tangente.

C'est une propriété de la parabole non généralisable à toutes les courbes.

Il reste à faire vérifier par les élèves – sur un exemple d'abord – que cette droite coupe bien la parabole en un seul point.

La parallèle à (C_1C_2) passant par $C(3 ; 0,9)$ a pour équation $y = 0,6(x - 3) + 0,9$.

La résolution d'un système nous donne le nombre de points d'intersection de cette droite avec la parabole :

$$\begin{cases} y = 0,1x^2 \\ y = 0,6(x - 3) + 0,9 \end{cases} \text{ ce qui implique } 0,1x^2 = 0,6x - 0,9 \text{ soit } x^2 - 6x + 9 = 0 \text{ donc } x = 3$$

Cette droite est donc bien la tangente selon le critère défini ci-dessus.

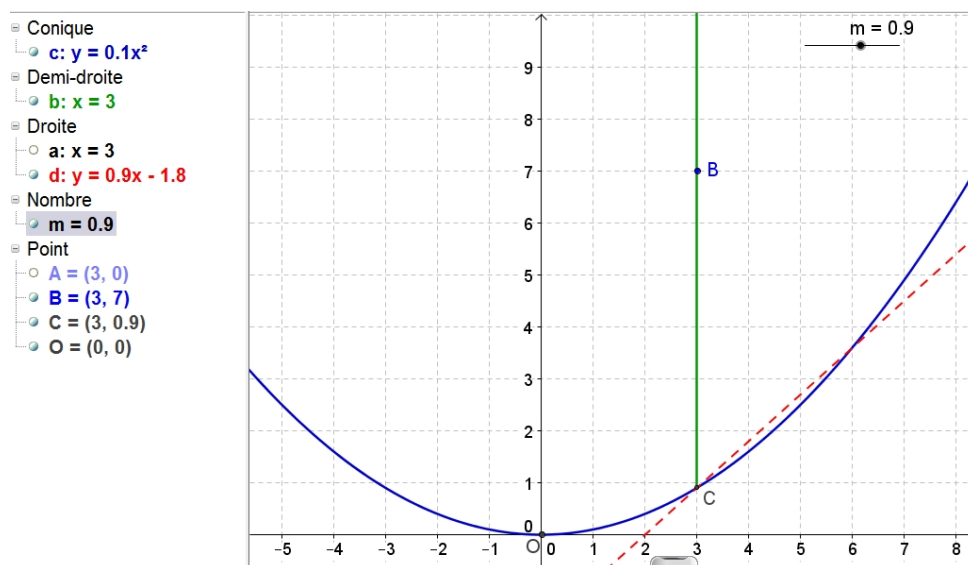
¹² Voir l'étude précédente avec la tangente au cercle.

¹³ Technique valable pour le cercle mais pas pour l'hyperbole.

¹⁴ Voir l'article de Repère IREM n° 74 [2].

Méthode 4

En faisant pivoter une droite non verticale autour de C , la droite ne devant pas recouper la parabole.



Une droite qui pivote autour de $C(3 ; 0,9)$ a pour équation $y = m(x - 3) + 0,9$.

On cherche le paramètre m tel que l'équation $0,1x^2 - mx + 3m - 0,9 = 0$ ne possède qu'une solution ($x = 3$).

On résout $\Delta = m^2 - 4 \times 0,1(3m - 0,9) = 0$ soit $m^2 - 1,2m + 0,36 = 0$ d'où $m = 0,6$.

On retrouve le résultat précédent.

Connaissant une équation de la tangente, il est alors possible grâce au produit des coefficients directeurs d'obtenir une équation de la normale (le repère est orthonormé) : $y = -\frac{1}{0,6}(x - 3) + 0,9$.

Puis, comme on l'a fait dans le cas du miroir sphérique, on peut déterminer une équation du rayon réfléchi en calculant les coordonnées de B' symétrique de B par rapport à la normale.

Si nous comparons ces quatre approches, nous constatons que la première et la deuxième permettent de donner du sens mais ne donnent pas naissance à une formule, la troisième s'avère difficile à concevoir car spécifique à la parabole, enfin la dernière, plus algorithmique permet l'obtention d'une formule.

Il est à noter que nous avons choisi une parabole d'équation $y = 0,1x^2$ car son tracé dans un repère orthonormé, facilite les constructions géométriques, la courbe étant plus « évasée » que la parabole d'équation $y = x^2$.

Le professeur stoppe alors provisoirement l'étude pour travailler la recherche de tangente dans des exercices techniques.

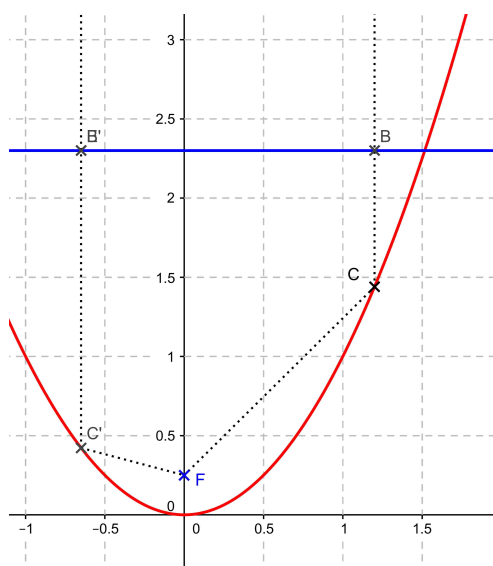
Septième temps

Explication du fonctionnement de l'antenne

Cette dernière partie consiste, avec toutes les nouvelles notions, à démontrer le fonctionnement de l'antenne parabolique : convergence des rayons réfléchis vers le foyer de la parabole, pour des rayons incidents parallèles à l'axe.

Certains élèves ne le font que sur un exemple générique et d'autres le démontrent dans le cas général.

Cette étude peut être complétée en démontrant que les signaux émis simultanément par l'objet observé arrivent au foyer au même instant.



Deux signaux émis en même temps par une source et passant en B et B' au même moment arriveront aussi en F au même instant. La vitesse de propagation étant identique pour les deux ondes cela revient à démontrer que $BC + CF = B'C' + C'F$.

Pour tout point $B(a ; k)$ avec k fixé, $k \geq a^2$ et C le point de la parabole de même abscisse que B , il suffit de démontrer que la distance $BC + CF$ est indépendante de a .

On a $C(a ; a^2)$ et $F(0 ; \frac{1}{4})$.

$$\begin{aligned} CB + BF &= \sqrt{(k - a^2)^2} + \sqrt{a^2 + \left(a^2 - \frac{1}{4}\right)^2} \\ &= k - a^2 + \sqrt{a^4 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{16} + a^2} \\ &= k - a^2 + \sqrt{\left(a^2 + \frac{1}{4}\right)^2} \\ &= k + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Pour finir, on peut maintenant expliquer la position du chariot focal sur un cercle de même centre que celui du miroir sphérique et de rayon moitié.¹⁵

4. Gestion de la classe

Premier temps

Enquête 1 : le Pôle des étoiles

Une semaine avant d'entamer ce parcours, le professeur a donné aux élèves les questions liées à cette première enquête.

Lors de cette enquête, la majorité des élèves ont trouvé leurs informations sur *Wikipedia* et quelques uns sur le site du Pôle des étoiles.

Il convient alors de faire le tri, en utilisant un *Padlet* par exemple, parmi le flot d'informations afin de retenir, lors de la mise en commun, les formes plane, sphérique et paraboloidale des miroirs qu'on étudiera. On précise que ces formes ont été choisies afin

¹⁵ Voir l'exercice 17 page 41.

Partie A.

de pouvoir suivre différents types d'objets célestes qui émettent des signaux plus ou moins forts et qui nécessitent donc un temps de suivi plus ou moins long.

Lors de la conclusion, on justifiera donc que les miroirs paraboliques qui ont un point focal ne permettent pas de capter suffisamment de rayons ou pas suffisamment longtemps d'où l'utilisation du grand radio télescope.

Un deuxième point est la structure des miroirs. Il paraît en effet étrange aux élèves qu'un simple grillage puisse réfléchir des ondes.

Il faut donc expliquer rapidement que la surface réfléchissante est liée à la longueur d'onde à réfléchir. Un miroir (au sens usuel du terme) est lui aussi "plein de trous" mais qui sont beaucoup plus petits. Un autre exemple est la grille présente sur toute porte de four micro-ondes qui évite la propagation des ondes en dehors du four tout en permettant de voir l'intérieur du four en ne filtrant pas les ondes dans la "gamme du visible".

Ce point peut être évoqué en lien avec un professeur de physique et sera repris lors d'un atelier au Pôle des étoiles.

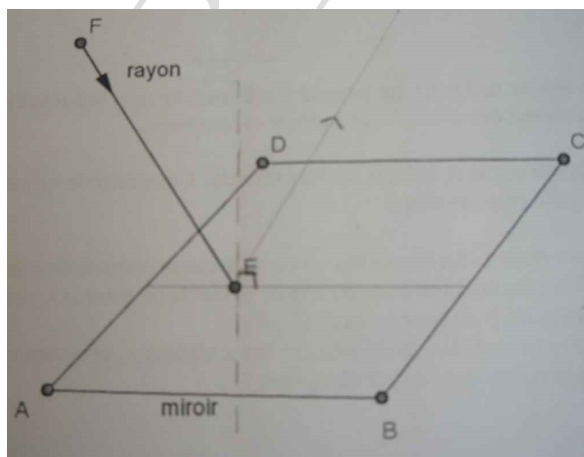
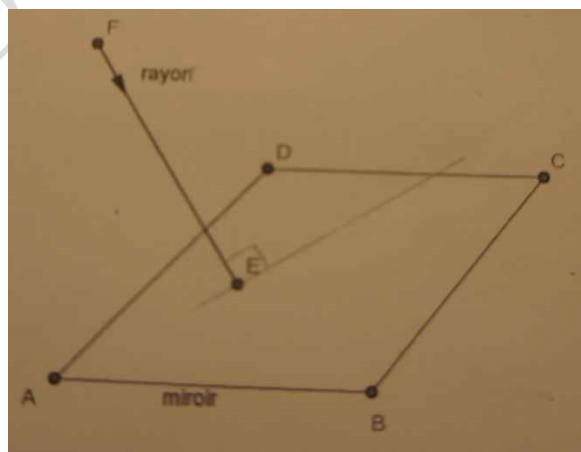
Deuxième temps

Enquête 2 : réflexion sur un miroir plan

Comment se réfléchit un rayon sur un miroir plan ?
Quelle loi d'optique permet de justifier la réponse ?

Élève 1

Le rayon réfléchi semble être perpendiculaire au rayon incident.



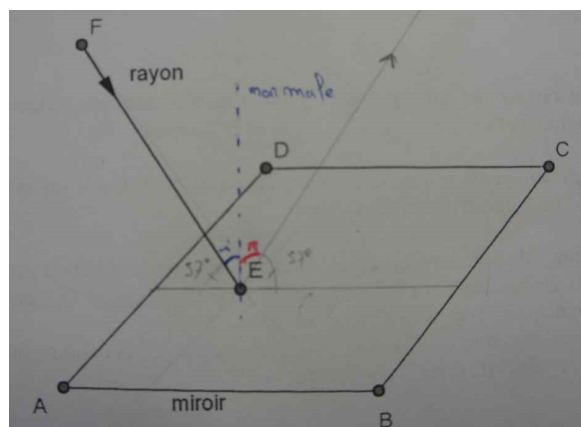
Élève 2

Une droite perpendiculaire au plan apparaît au niveau du point d'incidence. Mais rien n'explique la construction du rayon réfléchi.

Élève 3 (la majorité des élèves)

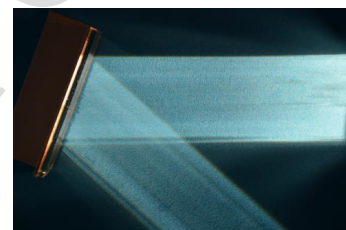
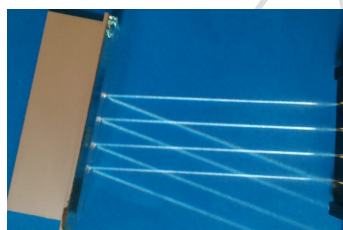
Beaucoup d'élèves se souviennent ou bien sont allés voir le professeur de physique qui leur a rappelé la « loi de réflexion ».

Mais il n'est jamais question de plan d'incidence.



Une expérience est faite avec du matériel emprunté aux collègues de physique. Ce matériel est composé d'un projecteur lumineux permettant, au moyen de lentilles et d'obturateurs, de projeter un ou plusieurs rayons lumineux et de divers type de miroirs.

À l'aide d'un rayon lumineux passant à travers un filtre, nous pouvons montrer l'effet d'un miroir plan sur ce rayon tout en pensant à expliquer que le principe est le même pour un rayon non visible.



On introduit la notion de plan d'incidence, dans lequel on utilise la loi de réflexion : égalité des angles incident et réfléchi (ou de leur complémentaire comme sur le schéma de l'élève 3). L'idée de construire le symétrique par rapport à la normale au point d'incidence vient très vite.

Troisième tempsÉtude 1 : réflexion sur un miroir plan

Les élèves (ou le professeur devant les élèves) font alors la construction avec *GeoGebra*.

L'enseignant invite les élèves à observer la fenêtre *algèbre*.

Seules les coordonnées des points construits sont identifiées par les élèves.

Le professeur leur demande alors de vérifier les équations apparaissant pour les droites (PS) et d afin de faire le lien entre équations cartésiennes, inconnues des élèves, et les équations réduites vues en seconde.

Un premier cours de géométrie analytique est alors rédigé avec :

- les équations cartésiennes de droites et des rappels sur les équations réduites.
On remarque que les équations cartésiennes dispensent de faire la distinction entre droites parallèles et droites non parallèles à l'axe des ordonnées ;
- le coefficient directeur $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ de la droite passant par A et B avec $x_A \neq x_B$;

Partie A.

- la droite de coefficient directeur m passant par A a pour équation réduite
$$y = m(x - x_A) + y_A;$$
- la condition de parallélisme de deux droites dont les équations réduites sont données ;
- la condition d'orthogonalité, dans un repère orthonormé, de deux droites dont les équations réduites sont données (démontrée à l'aide du théorème de Pythagore).

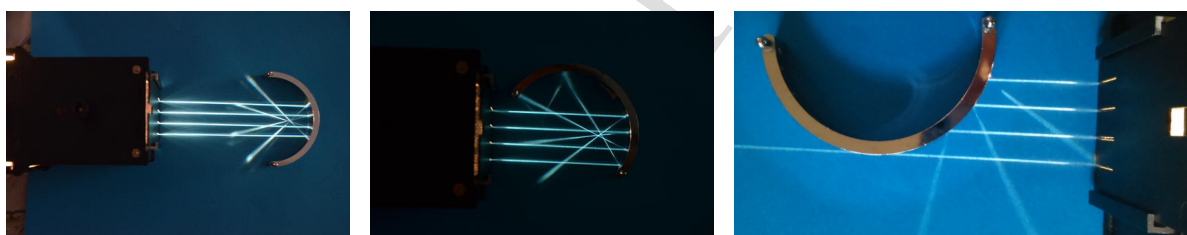
Puis vient le temps des exercices didactiques (en particulier des transformations d'équations réduites en équations cartésiennes et vice-versa).

On peut alors revenir à l'étude 1 pour trouver une équation du rayon réfléchi. Le professeur propose de chercher les coordonnées du point S' symétrique de S par rapport à la perpendiculaire à d en P en suivant le programme de construction :

- équation de la perpendiculaire à d passant par P ;
- équation de la parallèle à d passant par S ;
- coordonnées du point d'intersection I de ces deux droites ;
- coordonnées de S' (avec I milieu de $[SS']$).

Quatrième temps

Étude 2 : réflexion sur un miroir sphérique



Le matériel de physique est à nouveau utilisé pour visionner les rayons réfléchis et les rayons limites sur un support circulaire.

On pourra en profiter pour montrer que, si les rayons réfléchis ne convergent pas en un point, ils semblent sécants au voisinage d'un point situé sur un demi rayon (qui est l'emplacement du chariot focal)¹⁶.

Partie A

Questions 1 et 2

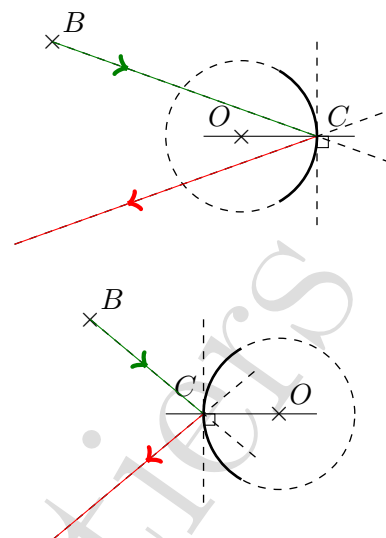
La première étape consiste à construire sur feuille non quadrillée le rayon réfléchi. Les propositions sont diverses mais rarement justifiées.

Un débat s'instaure dans la classe dans le but d'essayer de faire le lien avec la loi de Descartes. La justification d'un tel lien ne va pas de soi. Un élève propose de zoomer autour du point d'incidence en stipulant qu'alors le cercle « deviendra une droite ». Le rayon du cercle apparaît perpendiculaire à cette droite (ce qu'il montre à l'écran à l'aide de *GeoGebra*). Pour vérifier, quelques élèves proposent de tracer la tangente au cercle en C . Le zoom autour du point A permet de convaincre les réfractaires que l'on peut appliquer la loi de Descartes localement, le cercle et la tangente apparaissant confondus.

¹⁶ Sera traité dans l'exercice 17 page 41.

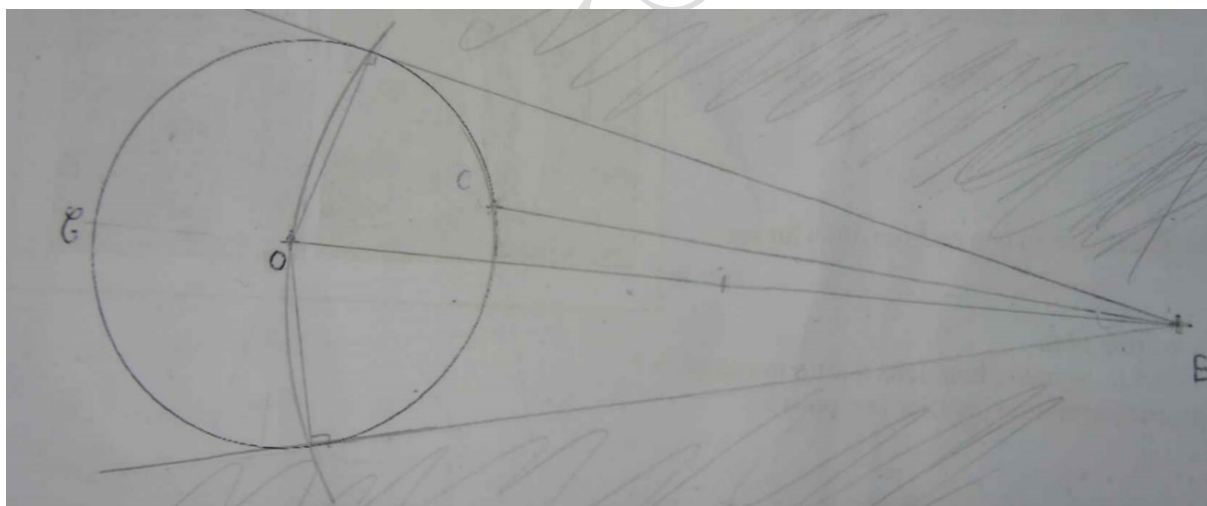
Un programme de construction est rédigé de manière collégiale. Il est important de l'écrire clairement car les élèves y reviendront dans la suite de l'étude.

- Tracer la tangente au cercle en C (elle ne sera pas indispensable mais nous permet de revenir au cas d'un miroir plan).
- Tracer la perpendiculaire à cette tangente en C (c'est le rayon $[OC]$). On l'appellera normale.
- Construire le symétrique B' de B par rapport à cette normale :
 - tracer la droite parallèle à la tangente en B ou bien la perpendiculaire à (OC) en B ;
 - construire son point d'intersection I avec (OC) ;
 - tracer B' tel que I soit le milieu de $[BB']$.



Question 3

La question consiste à construire les rayons venant d'un point B extérieur au cercle, qui ne se réfléchissent pas sur ce cercle. Les élèves comprennent qu'il leur faut tracer les tangentes au cercle issues de B . Mais la construction précise pose problème à beaucoup d'entre eux : les rayons limites sont obtenus en faisant glisser une règle. Certains tracent le cercle de centre B et de rayon $[BO]$ sans pouvoir expliquer pourquoi les points d'intersection de ces cercles donneraient les points (et donc les tangentes) recherchés. Cette démarche peut être invalidée en rapprochant le point B du cercle.



Un temps d'échange est donc nécessaire avec toute la classe pour essayer de trouver un moyen de construire les tangentes recherchées. Le professeur propose alors une construction faite à l'aide de *GeoGebra* (fenêtre algèbre fermée) qui fait apparaître des triangles rectangles inscrits dans un demi-cercle.

Suivent des exercices didactiques sur les équations de cercles :

- déterminer l'équation d'un cercle de centre et de rayon donnés ;
- déterminer l'équation d'un cercle de diamètre donné ;
- déterminer l'ensemble des points vérifiant une équation de la forme

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

La recherche du centre et du rayon d'un cercle à partir des équations développées permet de travailler la mise sous forme canonique des expressions du second degré.

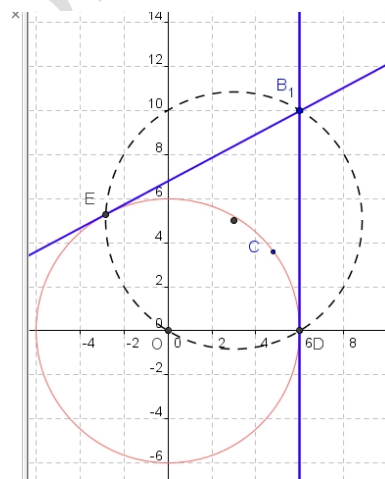
Un retour à l'étude permet de trouver les coordonnées des points D et E par la résolution d'un système d'équations (intersection de deux cercles). Ce travail très technique se fait avec le professeur, qui montre la similitude avec la recherche des points d'intersection de deux droites.

Cette partie est coupée en deux pour avoir dans un premier temps une équation que les élèves savent résoudre (en factorisant), puis une autre équation du second degré qui motivera l'introduction de la résolution générale d'équations du second degré.

Question 1

La résolution de l'équation $\frac{34}{9}y^2 - 20y = 0$ ne présente pas de difficultés. Les élèves peuvent donc calculer les coordonnées des deux points de tangence et donc les équations des deux tangentes recherchées (dont une est verticale).

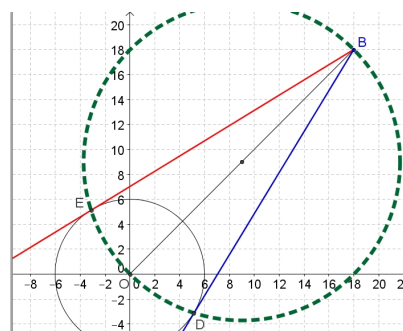
Objets libres
 ● $B_1 = (6, 10)$
 ● $C = (4.8, 3.6)$
 ● $c: x^2 + y^2 = 36$
 Objets dépendants
 ● $D = (6, 0)$
 ● $E = (-2.82, 5.29)$
 ● $O = (0, 0)$
 ● $a: 4.71x - 8.82y = -60$
 ● $b: x = 6$
 ● centre = $(3, 5)$
 ● $d: (x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 34$



Question 2

L'équation $y^2 - 2y - 16 = 0$, en revanche, amène à la résolution générale des équations du second degré.

Conique
 ● $c: x^2 + y^2 = 36$
 ● $d: (x - 9)^2 + (y - 9)^2 = 162$
 Demi-droite
 ● $a: 12.88x - 21.12y = -148.43$
 ● $e: 21.12x - 12.88y = 148.43$
 Point
 ● $A = (9, 9)$
 ● $B = (18, 18)$
 ● $D = (5.12, -3.12)$
 ● $E = (-3.12, 5.12)$
 ● $O = (0, 0)$
 Segment
 ● $b = 25.46$



Le cours est exposé et est suivi d'exercices techniques.

Suite à cette étude, les élèves ont rencontré :

- d'une part, les équations de droites, de cercles, la résolution des équations du second degré ;
- d'autre part, par rapport à la situation, une méthode de construction d'un rayon réfléchi sur un support sphérique.

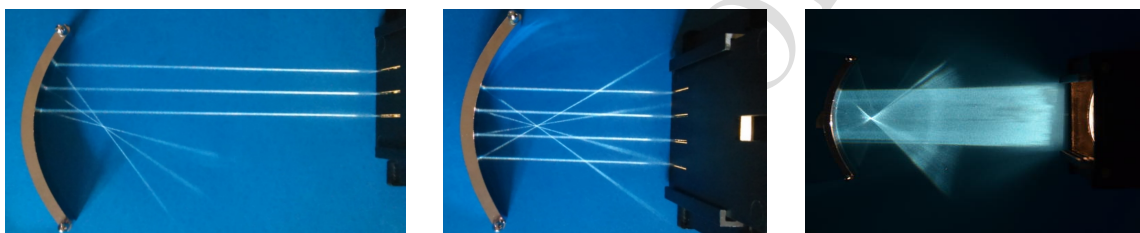
Transition

Nous avons donc à ce stade des éléments de réponse sur les propriétés de réflexion des deux miroirs grillagés du grand radiotélescope.

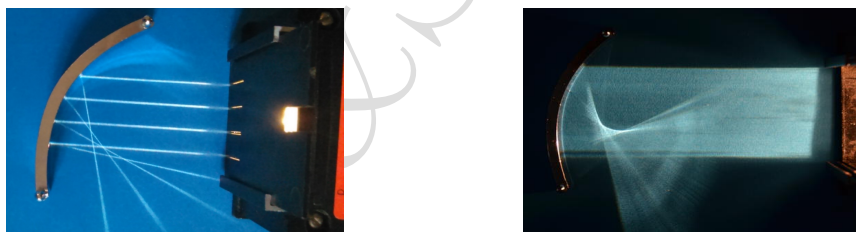
Si les notions n'avaient pas été trop complexes, nous aurions pu enchaîner sur une dernière étude sur le grand radiotélescope par le lien, dans le plan de réflexion, entre parabole et son foyer (chariot focal) et cercle osculateur à cette parabole (section du miroir sphérique dans le plan de réflexion).¹⁷

Pour finir, nous abordons donc l'étude des antennes de l'héliographe en traitant du fonctionnement d'une antenne parabolique.

La question principale consiste à savoir comment se réfléchit une onde ou un rayon sur une surface parabolique. Une expérience peut encore aider les élèves à bien s'approprier le problème. Le déplacement du miroir parabolique montre que seuls des rayons parallèles à l'axe de la parabole entraînent des rayons réfléchis convergeant vers le foyer.



Les rayons parallèles à l'axe de la parabole convergent vers le foyer.



Les rayons non parallèles à l'axe de la parabole ne convergent pas.

Cinquième temps

Enquête 3 : fonctionnement des antennes paraboliques

Le professeur, avant d'aborder cette partie, demande aux élèves de faire une enquête auprès de leur professeur de physique, de leurs parents, sur Internet... et de se préparer à exposer leur recherche en classe.

De nombreux élèves ont privilégié Internet et reviennent avec des schémas, des explications succinctes mais suffisantes pour comprendre le fonctionnement d'une antenne parabolique. Le but du parcours est, à partir de ce que les élèves ont pu trouver, de justifier ce fonctionnement.

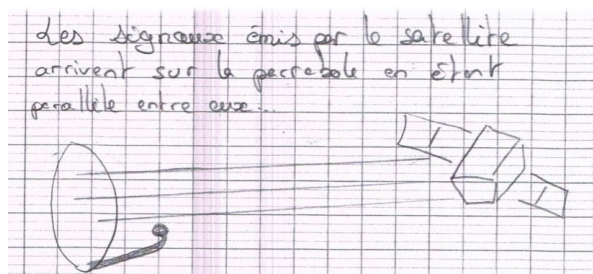
On remarquera beaucoup d'informations sur des signaux émis par un satellite, mais le principe est exactement le même pour toute source éloignée de la Terre.

¹⁷ La forme sphérique a été choisie pour pouvoir suivre les objets pendant un temps plus long.

Élève 1

L'importance de la forme paraboloidale du réflecteur est déjà évoquée avec ses propriétés géométriques.

Cela peut être l'occasion, ici, de parler de la modélisation des ondes venant d'un objet éloigné (satellite, Soleil, galaxie...) par des droites parallèles. Les élèves ne sont pas surpris car ils ont déjà eu l'occasion de la rencontrer en physique.



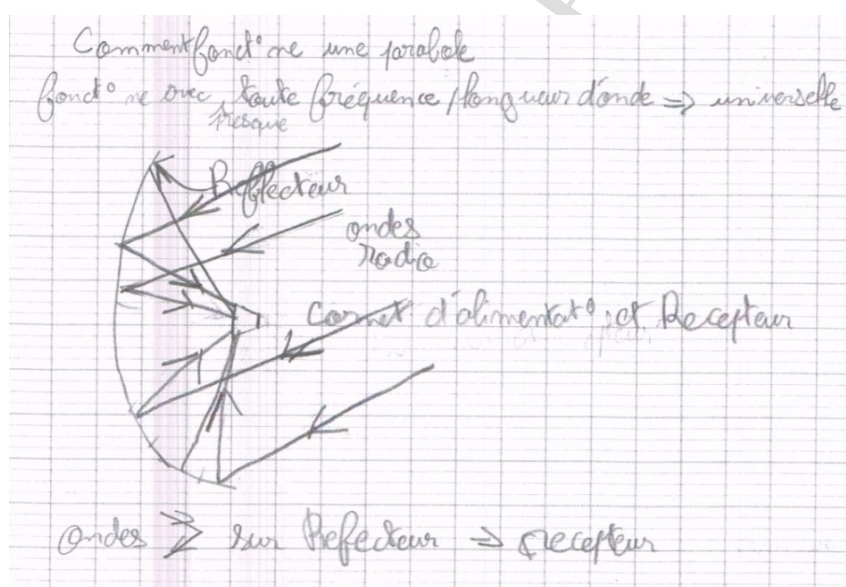
Dispose d'un réflecteur paraboloidal doté de propriété géométrique. Il est chargé de concentrer les ondes reçues ou émise vers le foyer de la parabole. Mat. : tôle emboutie (Acier ou Alu.)

Élève 2

Le schéma évoque ici une propriété importante de la parabole qui fait réfléchir des ondes parallèles vers un même point (emplacement du récepteur).

Une discussion est alors lancée sur l'importance de l'orientation de la parabole.

Un autre élève apporte alors un complément important.

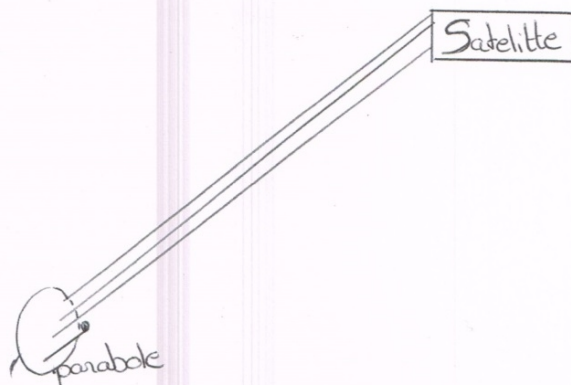


Partie A.

Élève 3

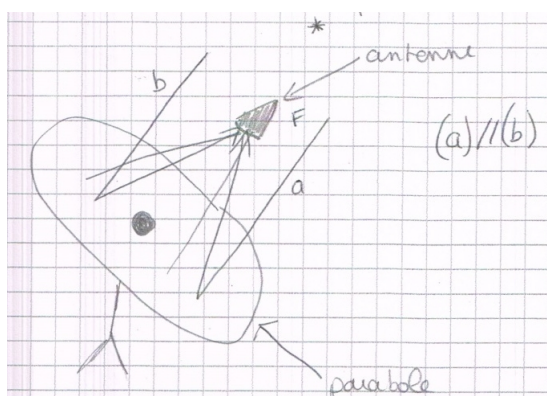
Les ondes doivent être parallèles entre elles et parallèles à l'axe de la parabole.

Orienté vers un satellite, d'où elle récupère les données. des signaux
emis par le satellite arrivent sur la parabole en étant parallèles les uns aux
autres et aussi parallèles à l'axe de symétrie de la parabole



Élève 4

Le schéma et le texte résument tout ce qui a été évoqué précédemment.



les rayons arrivent parallèlement
du satellite sur la parabole de
l'antenne et viennent se réfléchir
en direction du foyer de l'antenne
→ l'antenne, les données sont
ensuite transmises vers un câble
coaxial.

La position du satellite peut laisser imaginer que l'élève a pensé à des rayons parallèles à l'axe de la parabole.

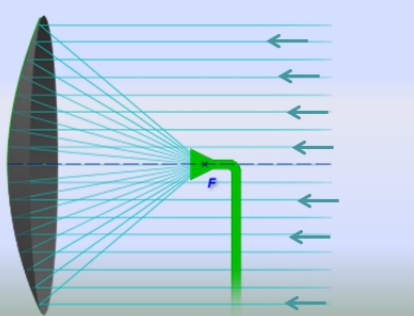
Bilan

Le professeur fait le bilan de cette discussion à l'aide d'un diaporama¹⁸ reprenant les idées amenées par les élèves en ajoutant des exemples où le phénomène de réflexion d'onde intervient de la même manière.

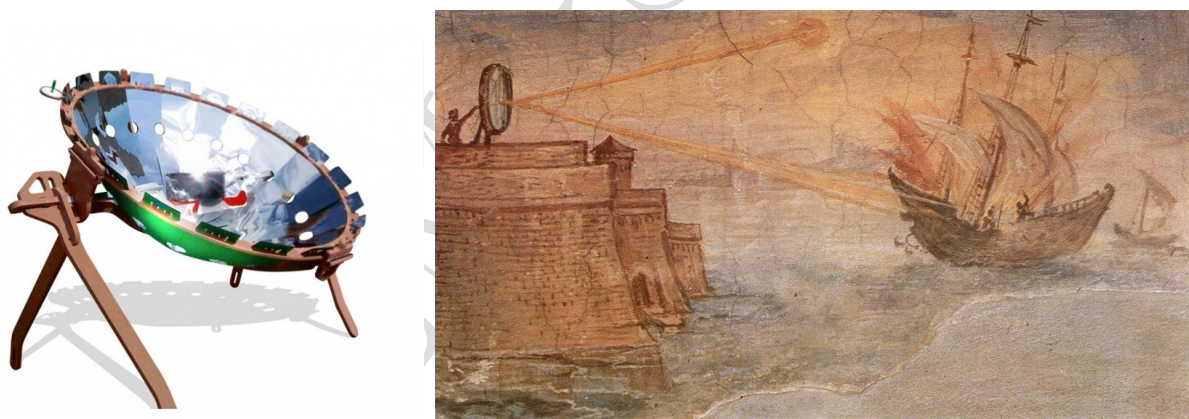
Extraits du diaporama :

Pourquoi une forme parabolique ?

La particularité d'une parabole est que le rayon réfléchi de toute onde incidente parallèle à l'axe de la parabole passe par un même point F, qu'on appelle foyer de la parabole.




Les propriétés de la parabole expliquent le fonctionnement des barbecues solaires mais aussi des miroirs ardents d'Archimède auxquels Tintin¹⁹ fait allusion.



Sixième temps

Étude 3 : réflexion sur un miroir parabolique

1. Construire sur le schéma ci-contre le rayon réfléchi du rayon incident parallèle à l'axe de la parabole. Justifier.
2. Cette parabole a pour équation $y = 0,1x^2$.
Déterminer une équation du rayon réfléchi de celui issu de $B(3 ; 7)$, parallèle à l'axe de la parabole. Justifier.

¹⁸ Voir diaporama en ligne sur le site de l'IREM&S de Poitiers.

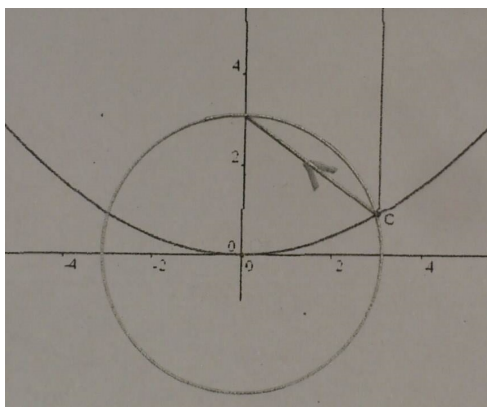
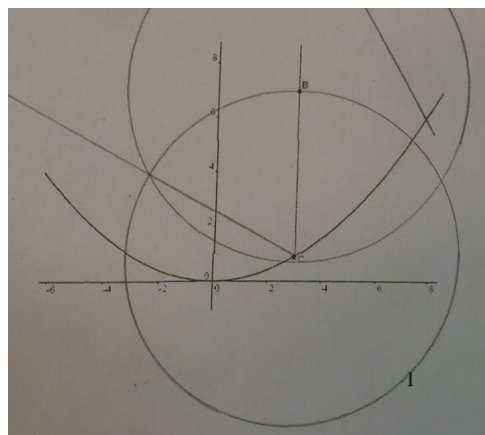
¹⁹ Hergé, *Le Temple du Soleil*, Édition Casterman Belgique 1949 p 51.

Partie A.

La première étape consiste à construire à la main le rayon réfléchi tout en cherchant la méthode la plus adaptée pour retrouver les équations de tous les objets géométriques tracés. Les élèves savent maintenant qu'il leur faut revenir à une situation connue, mais ne savent pas comment tracer la tangente à la parabole en C .

Élève 1

L'élève cherche un point intersection de deux cercles (peut-être comme dans l'étude précédente) sans pouvoir justifier sa construction.

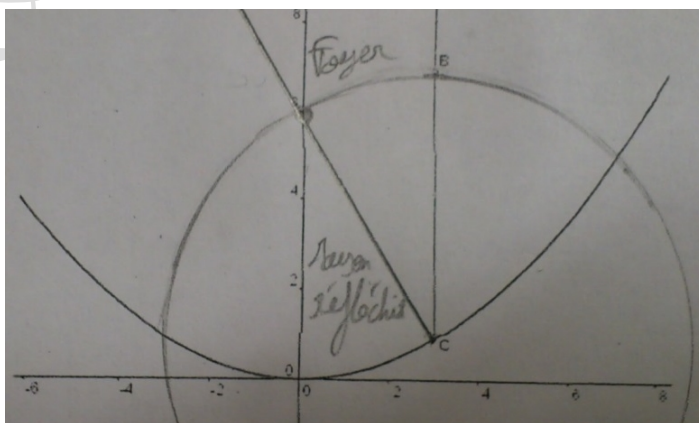


Élève 2

L'élève semble penser que le rayon réfléchi passe par l'intersection de l'axe de la parabole et du cercle de centre O et de rayon $[OC]$. Il évoque le fait que le foyer dont nous cherchons à montrer l'existence est sur l'axe de la parabole mais sans fournir de justification.

Élève 3

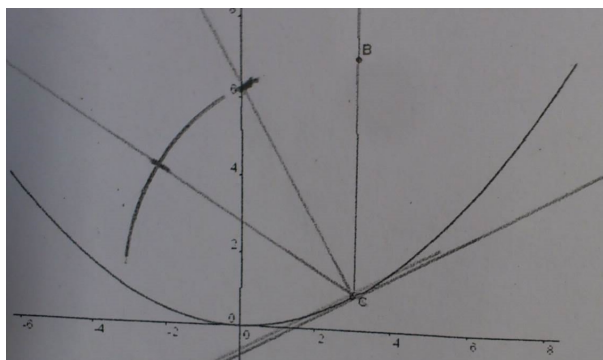
Les mêmes arguments sont donnés par cet élève avec un autre tracé de cercle.



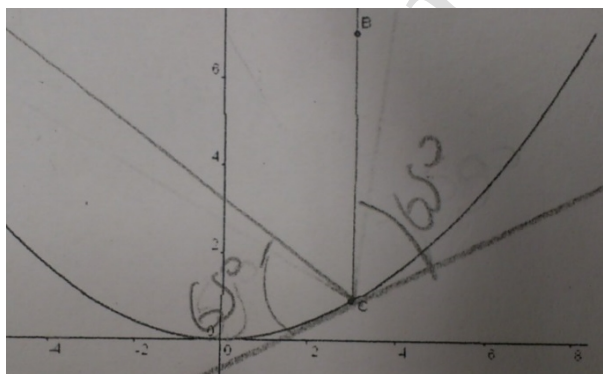
Ces trois premiers élèves n'ont pas l'idée d'utiliser une symétrie pour construire le rayon réfléchi.

Élève 4

L'élève construit (approximativement) la tangente et la normale à la parabole en C et semble construire le symétrique du rayon incident par rapport à cette normale (sans vraiment le dire).

**Élève 5**

Ce dernier élève (et d'autres encore) construit la « tangente » à la parabole en C et le symétrique du rayon incident. Il le montre en notant l'égalité des complémentaires des angles incident et réfléchi.



La classe entière, accepte de reprendre l'idée de la tangente en C . Mais la construction et la recherche de son équation posent problème. Le professeur lance la discussion sur la particularité de la droite cherchée. Les élèves, ne connaissant que la définition d'une tangente à un cercle (perpendiculaire au rayon), pensent alors à sa particularité qui est de ne « toucher » la courbe qu'en un seul point.

Pour déterminer la tangente, il manque son coefficient directeur. Le professeur propose de faire pivoter une droite non parallèle à l'axe des ordonnées autour de C et d'utiliser le fait que cette droite ne doit recouper la parabole qu'en C . La classe va donc résoudre, pour la première fois, une équation du second degré avec paramètre. Les élèves peuvent vérifier leurs calculs avec l'équation donnée par *GeoGebra*.

Ce travail terminé, la classe discute sur la suite de la stratégie pour résoudre l'étude 2. Une fois calculée l'équation de la tangente, il reste (comme pour l'étude précédente) à déterminer une équation de la normale en C , puis les coordonnées du point B' symétrique de B par rapport à cette normale.

Le professeur stoppe provisoirement l'étude pour travailler sur la recherche de tangente dans des exercices techniques.

Septième temps**Explication du fonctionnement de l'antenne parabolique**

Le parcours se termine par l'exercice montrant l'existence du foyer, point fixe par lequel passent tous les rayons réfléchis des rayons incidents parallèles à l'axe de la parabole.

L'étude se fait avec la classe afin de déterminer la procédure à mettre en place. L'utilisation de *GeoGebra* permet d'ordonner les différentes étapes.

Partie A.

Plusieurs niveaux sont possibles :

Niveau 1

Rayon incident (AB) avec la parabole d'équation $y = x^2$ et les points $A(2 ; 4)$ et $B(2 ; 7)$.

Niveau 2

Rayon incident (AB) avec la parabole d'équation $y = x^2$ et les points $A(a ; a^2)$ et $B(a ; b)$ avec $b \geq a^2$.

Niveau 3

Rayon incident (AB) avec la parabole d'équation $y = px^2$ et les points $A(a ; pa^2)$ et $B(a ; b)$ avec $b \geq pa^2$.

Démarches possibles

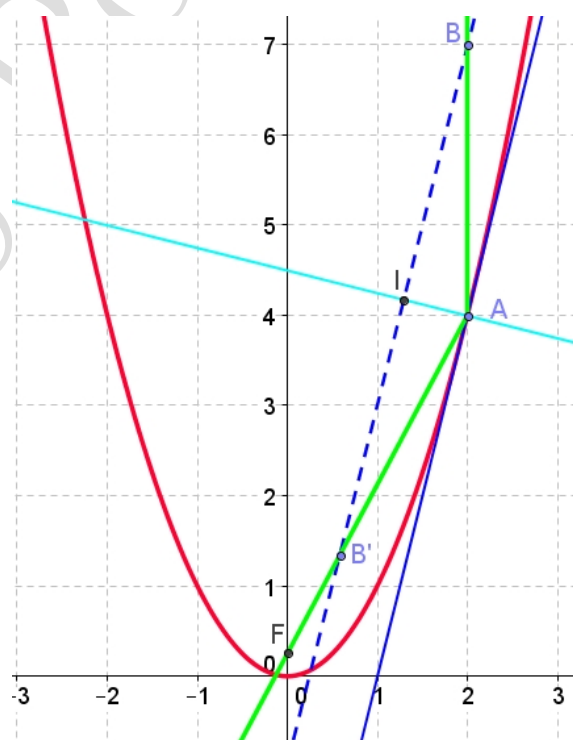
Démarche 1 : avec un milieu

Déterminer :

- une équation du rayon (AB) parallèle à l'axe de la parabole ;
- une équation de la tangente au point A ;
- une équation de la normale en A .

Pour déterminer le symétrique de B par rapport à la normale, calculer :

- une équation de la parallèle passant par B à la tangente en A ;
- les coordonnées du point I , intersection de cette droite avec la normale ;
- les coordonnées de B' tel que I milieu de $[BB']$;
- une équation du rayon réfléchi (AB') ;
- les coordonnées du point d'intersection de ce rayon réfléchi avec l'axe des ordonnées.



Démarche 2 : intersection d'un cercle et d'une droite

Déterminer :

- une équation du rayon parallèle à l'axe de la parabole, passant par A ;
- une équation de la tangente au point A ;
- une équation de la normale en A .

Pour déterminer le symétrique de B par rapport à la normale, calculer :

- une équation de la parallèle (d) passant par B à la tangente en A ;
- une équation du cercle de centre A et de rayon AB ;
- les coordonnées de B' intersection de ce cercle et de la droite (d) ;
- une équation du rayon réfléchi (AB') ;
- les coordonnées du point d'intersection de ce rayon réfléchi avec l'axe des ordonnées.

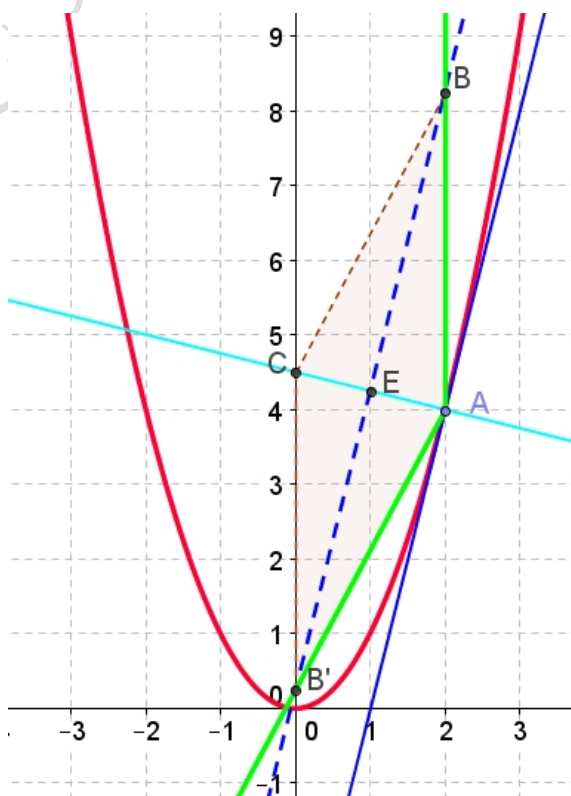
Démarche 3 : Construction d'un losange

Déterminer :

- une équation du rayon (d) parallèle à l'axe de la parabole, passant par A ;
- une équation de la tangente au point A ;
- une équation de la normale en A .

Pour déterminer, à l'aide d'un losange, le symétrique d'un point du rayon incident, calculer :

- les coordonnées de C , intersection de la normale à la parabole en A et de l'axe des ordonnées;
- les coordonnées du point E intersection de (d) et de la médiatrice de $[AC]$;
- les coordonnées de B' symétrique de B par rapport à (AC) .



Reste à conclure sur le fonctionnement de l'antenne parabolique.

5. Un exemple de parcours réalisé en classe

Enquête 1 : Le site de Nançay

Bilan oral et diaporama du professeur

Enquête 2 : Réflexion sur un miroir plan.

Bilan oral (loi de Snell–Descartes)

Étude 1 : Miroir plan

Bilan : programme de construction du rayon réfléchi et des rayons limites.

Cours : Équations de droites (réduite et cartésienne) – Droites parallèles / Droites perpendiculaires

Devoir maison (voir page suivante)

Exercices (équations de droites) : 1 à 5

Étude 2 : Miroir sphérique (Partie A)

Bilan : programme de construction du rayon réfléchi et des rayons limites

Étude 2 : Miroir sphérique (Partie B)

Bilan : Tangente à un cercle

Étude 2 : Miroir sphérique (Partie C – Question 1)

Cours : Équations de cercle et tangentes à un cercle

Exercices (équations de cercles) : 6 à 11

Étude 2 : Miroir sphérique (Partie C – Question 2)

Cours : Équations du second degré (discriminant / racine / factorisation)

Programme de calcul des racines d’une expression du second degré (en Python)

Exercices (second degré) : 12 à 15

Enquête 3 : Miroir parabolique

Bilan oral (foyer, définition d’une tangente à une parabole)

Étude 3 : Miroir parabolique

Bilan oral : Notion de tangente à une parabole.

Exercice (Tangente à une conique) : 16

Explication du fonctionnement de l’antenne parabolique

Démonstration de l’existence du point fixe (foyer) par lequel passent tous les rayons réfléchis des rayons incidents parallèles à l’axe de la parabole et simultanéité de l’arrivée au foyers des rayons émis à un même instant.

Exercice (Miroir sphérique et demi rayon) : 17

Devoir maison 1 mathematikum



Der Parabelrechner

Mit einer Parabel kann man multiplizieren!

Wenn Du zum Beispiel 3 mal 4 rechnen willst, gehst Du zunächst 3 nach links und dann nach oben zu dem Punkt der Parabel. Dann gehst Du 4 nach rechts und zum darüber liegenden Punkt der Parabel.

Jetzt verbindest du die beiden Parabelpunkte durch die Schnur. Dort, wo die Schnur die senkrechte Achse trifft, steht das Ergebnis.

Das Exponat basiert auf einer Idee des russischen Mathematikers Yuri MATIYASEVICH (*1947).



The parabola calculator

You are able to multiply with the help of a parabola.

Suppose you want to calculate 3 times 4.

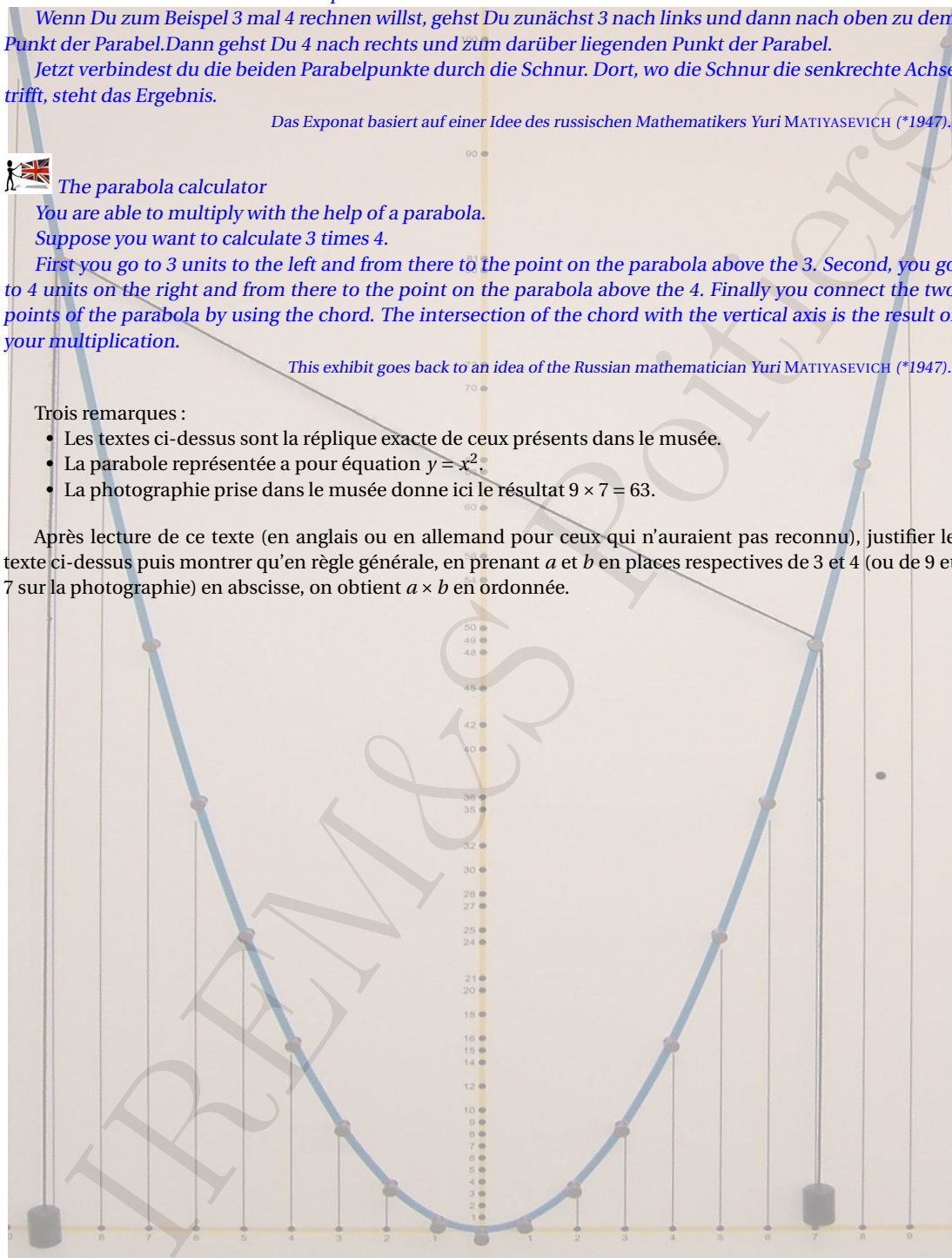
First you go to 3 units to the left and from there to the point on the parabola above the 3. Second, you go to 4 units on the right and from there to the point on the parabola above the 4. Finally you connect the two points of the parabola by using the chord. The intersection of the chord with the vertical axis is the result of your multiplication.

This exhibit goes back to an idea of the Russian mathematician Yuri MATIYASEVICH (*1947).

Trois remarques :

- Les textes ci-dessus sont la réplique exacte de ceux présents dans le musée.
- La parabole représentée a pour équation $y = x^2$.
- La photographie prise dans le musée donne ici le résultat $9 \times 7 = 63$.

Après lecture de ce texte (en anglais ou en allemand pour ceux qui n'auraient pas reconnu), justifier le texte ci-dessus puis montrer qu'en règle générale, en prenant a et b en places respectives de 3 et 4 (ou de 9 et 7 sur la photographie) en abscisse, on obtient $a \times b$ en ordonnée.



Première S – Lycée du Bois d'Amour

DM 1

Pour le 25 septembre 2017

6. Exercices

Dans tous les exercices, sauf mention du contraire, le plan est muni d'un repère ortho-normé.

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère quelconque $(O ; I, J)$.

La droite (d) a pour équation $x + 2y - 1 = 0$ coupe-t-elle les axes de coordonnées ? Si oui, en quels points ?

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère quelconque $(O ; I, J)$.

- (d_1) a pour équation $2x + 3y - 6 = 0$;
- (d_2) a pour coefficient directeur $\frac{3}{4}$ et passe par $A(-4 ; -1)$.
- (d_3) a pour équation $x = -3$.

Déterminer les points d'intersection de chacune de ces droites avec les deux autres.

Exercice 3

1. Déterminer une équation de la droite (d_0) perpendiculaire à la droite (d) d'équation $y = 2x + 4$ et passant par le point $A(4 ; 5)$.
2. On considère les points $B(0 ; 4)$ et $C(1 ; 1)$. Déterminer une équation de la droite (d_1) parallèle à la droite (BC) et passant par A .

Exercice 4

Soient les points $A(-4 ; 1)$, $B(-2 ; -2)$ et $C(2 ; 5)$.

Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A .

Exercice 5

Soient les points $A(-3 ; 1)$, $B(1 ; 3)$ et $C(-1 ; -5)$. Dans le triangle ABC :

1. Déterminer une équation de la médiane issue de A .
2. Déterminer une équation de la médiatrice de $[BC]$.
3. Déterminer une équation de la hauteur issue de B puis calculer l'aire du triangle ABC .

Exercice 6

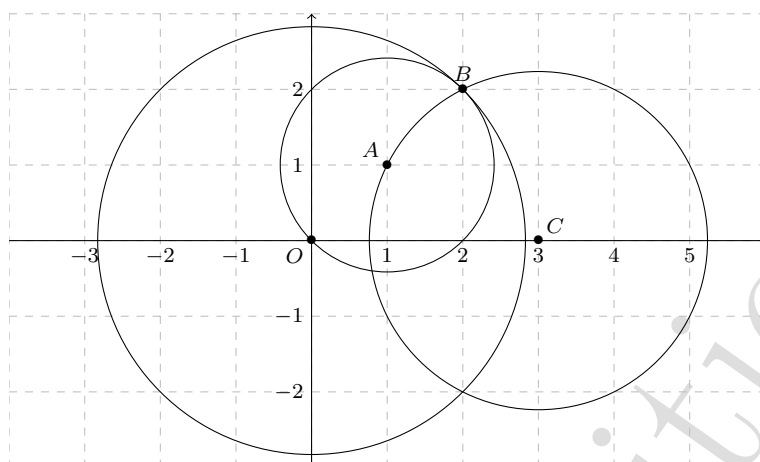
1. Déterminer une équation du cercle de centre O et de rayon 3.
2. Déterminer une équation du cercle de diamètre $[AB]$ où $A(-1 ; -2)$ et $B(3 ; -1)$.

Exercice 7

Déterminer les points d'intersection du cercle de centre $\Omega(10 ; 12)$ et de rayon 20 avec les axes du repère.

Exercice 8

Soient les points $A(1 ; 1)$, $B(2 ; 2)$, $C(3 ; 0)$ et $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre A passant par B ; $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre C passant par A et $\mathcal{C}_3$ le cercle de centre O passant par B .



Associer à chaque cercle son équation :

$$\mathcal{E}_1 : x^2 + y^2 - 8 = 0 ; \quad \mathcal{E}_2 : x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 ; \quad \mathcal{E}_3 : x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0.$$

Exercice 9

1. On considère la courbe d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 5 = 0$.
Est-ce une équation de cercle ? Si oui déterminer son rayon et son centre.
2. Même question pour $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$.
3. Même question pour $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 15 = 0$.

Exercice 10

On donne le cercle $(\mathcal{C})$ d'équation $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$ et la droite (d) d'équation $4x + y - 31 = 0$.

1. Construire le cercle $(\mathcal{C})$ et la droite (d) .
2. Les points $A(7 ; 3)$ et $B(-1 ; 1)$ sont-ils des points du cercle $(\mathcal{C})$?
3. La droite (d) est-elle tangente en A au cercle $(\mathcal{C})$?
4. La tangente en B au cercle $(\mathcal{C})$ est-elle parallèle à la droite (d) ?

Exercice 11

1. Soit le cercle $(\mathcal{C})$ de centre $S(2 ; 3)$ et de rayon 4. On donne $B(12 ; 1)$.
Démontrer que le point $D(4,4 ; 6,2)$ appartient au cercle $(\mathcal{C})$.
2. Un rayon lumineux étant représenté par la droite (BD) , ce rayon est-il dévié par un miroir cylindrique dont $(\mathcal{C})$ est la base ?

Exercice 12

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle de centre $A(10 ; 0)$ et de rayon 6. Soit (d) une droite issue de O et de coefficient directeur a . Pour quelle valeur de a est-elle tangente au cercle $(\mathcal{C})$?

Exercice 13 : des gammes... avec un peu de finesse !

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------|----------------------------|
| 1. $x^2 + x - 12 = 0$; | 5. $x^2 = 7x - 13$; | 9. $5x^2 + 30x + 45 = 0$; |
| 2. $2x^2 - 7x + 5 = 0$; | 6. $(2x + 5)^2 = 1$; | 10. $x^2 + 3x = 0$; |
| 3. $x^2 - 8x = 9$; | 7. $5x^2 - 25x + 1 = 0$; | 11. $x^2 = 0$; |
| 4. $100x^2 + 60x + 9 = 0$; | 8. $4 - 5x^2 + x = 0$; | 12. $x^2 = x + 1$. |

Exercice 14 : intersection de cercles

On considère les cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ d'équations :

$$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \quad \text{et} \quad (\mathcal{C}') : x^2 + y^2 - 2x - 12 = 0.$$

- Déterminer les coordonnées de leurs points d'intersection.
- Contrôler les résultats à l'aide d'un graphique.

Exercice 15 : aire et périmètre

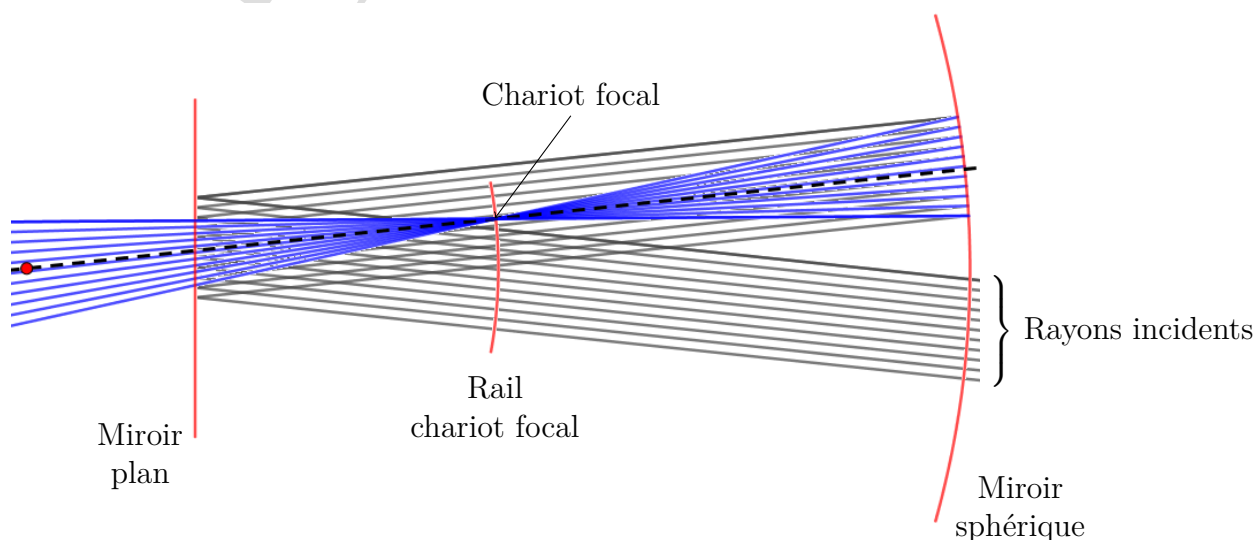
- ABC est un triangle rectangle en A tel que $BC = 25$ cm. L'aire du triangle ABC est 84 cm^2 . Déterminer les dimensions du triangle ABC .
- DEF est un triangle isocèle en E avec $DE = 25$ cm. L'aire du triangle DEF est 168 cm^2 . Déterminer les valeurs possibles du périmètre du triangle DEF .

Exercice 16

Les fonctions f et g sont définies par $f(x) = \frac{2x+3}{1-x}$ pour $x \neq 1$ et $g(x) = \frac{4}{x}$ pour $x \neq 0$. Le plan est muni d'un repère quelconque $(O ; I, J)$. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection des courbes de f et g .

Exercice 17 : le miroir sphérique

Le grand radiotélescope de Nançay utilise un miroir sphérique ; or lors de la réflexion sur une sphère, des ondes incidentes parallèles ne convergent pas vers un même point. Le but de cet exercice est d'expliquer pourquoi au voisinage d'un point d'incidence, la sphère se comporte comme une parabole dont le foyer est situé au milieu du rayon de la sphère passant par le point incident.



Pour simplifier la situation, on se place dans le plan d'incidence muni d'un repère orthonormé d'origine le point d'incidence et d'axe des ordonnées la droite passant par le point d'incidence et le centre du miroir sphérique.

Soit la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$.

Soit le cercle $\mathcal{C}$ de centre $\Omega(0 ; a)$ (où $a > 0$) tangent à la parabole en l'origine O .

Le but de cet exercice est de déterminer la valeur maximale de a .

1. Discuter, en fonction de a le nombre de points d'intersection de ces deux courbes.
2. Déterminer alors le “plus grand cercle” tangent à la parabole en O .
3. Nous avons vu auparavant que son foyer avait pour coordonnées $(0 ; \frac{1}{4})$.
Où est situé ce point par rapport à l'origine et au centre du cercle déterminé à la question précédente ?

Solution

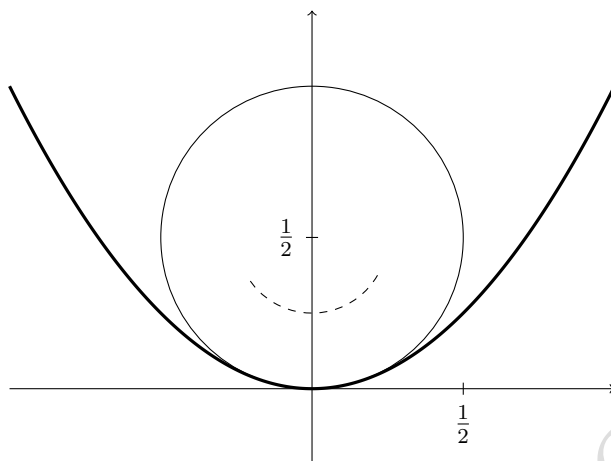
1. Soit $a \in [0 ; +\infty[$.

$$\begin{aligned}
 M(x ; y) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{C} &\iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + (y - a)^2 = a^2 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + y^2 - 2ay = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 + x^4 - 2ax^2 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 + (1 - 2a)x^2 = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^2(x^2 + 1 - 2a) = 0 \end{cases} \\
 &\iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} y = x^2 \\ x^2 = 2a - 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

- Si $a \in [0 ; \frac{1}{2}]$, alors les courbes n'ont qu'un point d'intersection qui est l'origine.
 - Si $a \in]\frac{1}{2} ; +\infty[$, alors les courbes ont trois points d'intersection qui sont l'origine, et les points $(\sqrt{2a - 1} ; 2a - 1)$ et $(-\sqrt{2a - 1} ; 2a - 1)$.
2. On a un unique point d'intersection qui est l'origine lorsque $a \in [0 ; \frac{1}{2}]$, donc le plus grand cercle a pour rayon $a = \frac{1}{2}$.
 3. Le foyer de la parabole se trouve à mi-distance entre le centre du “plus grand cercle” et l'origine..

Le “plus grand cercle” et la parabole étant “proches” au voisinage du point de contact, ceci explique la position du chariot focal qui se déplace sur un arc de cercle de même centre que le miroir sphérique et de rayon moitié.

Partie A.



Remarque : Le rayon du cercle osculateur à la courbe d'une fonction deux fois dérivable en un point où la dérivée seconde ne s'annule pas est donné par

$$R = \frac{[1 + f'(x)^2]^{3/2}}{f''(x)}$$

Bibliographie de la partie A.

Ouvrages

- [2] Caroline DUCOS. “À propos de l’introduction du concept de nombre dérivé d’une fonction en un point par l’approche cinématique en classe de première S”. In : *Repères IREM* 74 (2009), p. 53-66.
- [5] Groupe lycée IREM DE POITIERS. *Enseigner les mathématiques en première S : trois parcours sur l’analyse et la géométrie analytique*. 2014.
- [12] Jean RORET et Jean-François DENISSE. “Construction du plus grand radiotélescope du monde à Nançay pour l’observatoire de Paris”. In : *Annales de l’institut technique du bâtiment et des travaux publics* 169 (1962), p. 67-100.
- [20] “Thème : radioastronomie”. In : *Les cahiers Clairaut* 163 (2018), p. 9-37.
- [21] Gilles THEUREAU. “Le grand radiotélescope de Nançay à 50 ans”. In : *Les cahiers Clairaut* 153 (2016), p. 34-36.

Sites

- [1] Ismaël COGNARD. *Page professionnelle*.
<http://lpc2e.cnrs-orleans.fr/~icognard/>.
- [4] Jacques GISPERT. *Cours d’Astronomie Générale : radioastronomie*.
https://astronomia.fr/1ere_partie/radioastronomie.php.
- [13] *Station de radioastronomie du Nançay*.
<https://www.obs-nancay.fr/>.

Partie B.

Enseigner les fonctions
trigonométriques
pour comprendre l'application
Shazam

Même en terminale S, où se trouve a priori le public scolaire le plus motivé par les mathématiques, les élèves posent parfois les questions suivantes : à quoi servent les notions qu'on nous présente ? Pourquoi ces définitions à apprendre, ces théorèmes (dont nombre d'entre eux sont admis), ces exercices qu'il faut préparer pour le baccalauréat ?

C'est une manière d'interroger le rôle de l'École, qui devrait avoir pour but principal l'instruction du futur citoyen et non pas exclusivement la répartition des élèves dans la société selon leur réussite aux examens. On peut également interpréter ce questionnement comme une vraie demande d'élèves curieux de savoir en quoi les mathématiques éclairent les faits du monde passé, présent ou futur et notamment ceux liés aux autres disciplines scientifiques.

Les programmes scolaires de mathématiques ne sont pas écrits dans cette optique : aucune question scientifique importante, relevant par exemple de la physique ou des sciences de la vie et de la terre n'est à l'origine de l'organisation des contenus à enseigner... Seuls quelques liens sont faits en commentaires.

Il revient donc aux professeurs de montrer que l'enseignement dispensé en classe contribue à répondre à cette interrogation légitime. Des recherches¹ sont alors nécessaires pour repenser la manière d'enseigner les notions mathématiques. C'est depuis une dizaine d'années, l'axe principal de travail des membres de l'IREM&S de Poitiers, tous enseignants en collège et en lycée. L'objectif est de présenter un maximum de contenus des programmes comme réponses à des questions, celles-ci aidant à structurer une progression annuelle.

Une question est à l'origine d'un Parcours d'Étude et de Recherche². Les contenus qui seront enseignés durant son déroulement devront contribuer à y répondre même partiellement. Parmi les questions choisies au lycée, citons :

- Comment prendre une décision avec les probabilités dans le domaine médical ?
(en terminale S ou terminale ES)
- Comment prévoir l'évolution de la population mondiale ?
(en première S, première ES ou terminale STMG)
- Y a-t-il trop de communes en France ?
(en seconde)

Ces questions ont été sélectionnées pour permettre à la fois de parler du monde qui nous entoure, montrer que les mathématiques sont porteuses de sens, travailler en interdisciplinarité tout en traitant le programme.

Dans cet article, nous proposons d'enseigner les fonctions trigonométriques en étudiant les ondes sonores figurant au programme de physique chimie (obligatoire et spécialité).

La question que nous développons est :

Comment fonctionne une application de reconnaissance musicale sur smartphone ?

¹ http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_-_Prix_Hans_Freudenthal_2009.pdf

² La notion de PER est due à Yves Chevallard, voir la bibliographie page 75.

1. Les programmes

Pourquoi avoir choisi un thème en lien avec la musique ? Outre le fait que la musique est un art et une science universels, source d'intérêt pour de nombreux élèves, l'étude des ondes sonores est très présente dans les programmes de physique-chimie, comme le prouvent ces extraits :

Enseignement obligatoire de physique-chimie

Ondes et particules

Notions et contenus	Compétences exigibles
Les ondes dans la matière Houle, ondes sismiques, ondes sonores. Magnitude d'un séisme sur l'échelle de Richter.	Extraire et exploiter des informations sur les manifestations des ondes mécaniques dans la matière.
Niveau d'intensité sonore.	Connaître et exploiter la relation liant le niveau d'intensité sonore à l'intensité sonore.

Caractéristiques et propriétés des ondes

Notions et contenus	Compétences exigibles
Caractéristiques des ondes Ondes progressives. Grandeurs physiques associées. Retard.	Définir une onde progressive à une dimension. Connaître et exploiter la relation entre retard, distance et vitesse de propagation (célérité). <i>Pratiquer une démarche expérimentale visant à étudier qualitativement et quantitativement un phénomène de propagation d'une onde.</i>
Ondes progressives périodiques, ondes sinusoïdales.	Définir, pour une onde progressive sinusoïdale, la période, la fréquence et la longueur d'onde. Connaître et exploiter la relation entre la période ou la fréquence, la longueur d'onde et la célérité. <i>Pratiquer une démarche expérimentale pour déterminer la période, la fréquence, la longueur d'onde et la célérité d'une onde progressive sinusoïdale.</i>
Ondes sonores et ultrasonores. Analyse spectrale. Hauteur et timbre.	Réaliser l'analyse spectrale d'un son musical et l'exploiter pour en caractériser la hauteur et le timbre.

Enseignement de spécialité de physique-chimie

Thème 2 : son et musique

Domaines d'étude	Mots-clés
Instruments de musique	Instruments à cordes, à vent et à percussion. Instruments électroniques. Acoustique musicale ; gammes ; harmonies. Traitement du son.
Émetteurs et récepteurs sonores	Voix ; acoustique physiologique. Microphone ; enceintes acoustiques ; casque audio. Reconnaissance vocale.
Son et architecture	Auditorium ; salle sourde. Isolation phonique ; acoustique active ; réverbération.

On trouve dans ces programmes des mots clés qui évoquent des contenus du programme de mathématiques de terminale S : ondes sinusoïdales (fonctions périodiques), analyse spectrale (somme de fonctions sinusoïdales), niveau d'intensité sonore (défini avec le logarithme décimal).

Enseignement obligatoire de mathématiques

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonctions sinus et cosinus	• Connaître la dérivée des fonctions sinus et cosinus. • Connaître quelques propriétés de ces fonctions, notamment parité et périodicité. • Connaître les représentations graphiques de ces fonctions.	On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$. En dehors des exemples étudiés, aucun développement n'est attendu sur les notions de périodicité et de parité. On fait le lien entre les résultats obtenus en utilisant le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$. ⇔ [SPC] Ondes progressives sinusoïdales, oscillateur mécanique.

Le cadre des ondes sonores nous permet d'aborder les fonctions sinusoïdales au travers du principe de la décomposition de Fourier d'une fonction périodique (suffisamment régulière). De plus, il nous semble que l'analyse spectrale étudiée en physique nécessite un traitement mathématique pour une meilleure compréhension des élèves.

De la même manière, et comme le suggère le programme de mathématiques (extrait ci-contre), nous pourrions prolonger ce travail en expliquant comment le logarithme décimal est utilisé pour définir l'échelle du niveau d'intensité ou de pression sonore, qui est une des applications des lois de psychophysique de Gustav Fechner.

On évoque la fonction logarithme décimal pour son utilité dans les autres disciplines.

⇔ [SI] Gain lié à une fonction de transfert.
 ⇔ [SPC] Intensité sonore, magnitude d'un séisme, échelle des pH.

Ⓐ Équations fonctionnelles.

2. Synopsis du parcours

Moment du parcours	Contenu mathématique	Durée estimée
Enquête sur le fonctionnement de l'application Shazam		30'
Étude : 1. Vision graphique d'un signal sonore complexe et du spectre	Fonctions périodiques Définition des fonctions cosinus et sinus + courbes	2h
2. Recherche d'une fonction sinusoïdale correspondant à un son pur de fréquence donnée	Fonctions associées : $kf(x)$; $f(kx)$; $f(x+k)$; $f(x)+k$	3h
3. Construction point par point de la somme de deux sinusoïdes		
4. Recomposition du signal sonore complexe à partir du spectre sur <i>Geogebra</i>		1h
5. Retour sur le fonctionnement de <i>Shazam</i> en conclusion de l'étude		30'
Complément du cours et exercices	Fonctions sinus et cosinus : parité, dérivée, variations.	4h

3. Shazam : l'enquête

Le parcours démarre par une enquête que les élèves devront mener. Il s'agit de voir ce que la question évoque pour eux, et de compléter leurs connaissances par une recherche.

Comment fonctionne une application de reconnaissance musicale sur smartphone ?

Tous connaissent, voire utilisent, une application de reconnaissance musicale sur leur smartphone. Deux d'entre elles sont particulièrement familières aux élèves : *Sound Hound* et *Shazam*. Nous choisissons de traiter la deuxième.

Le bilan des recherches amène la classe à comprendre que c'est en comparant un extrait musical à une banque de données d'enregistrements que l'application *Shazam*, en quelques secondes, retrouve titre et interprète du morceau.³

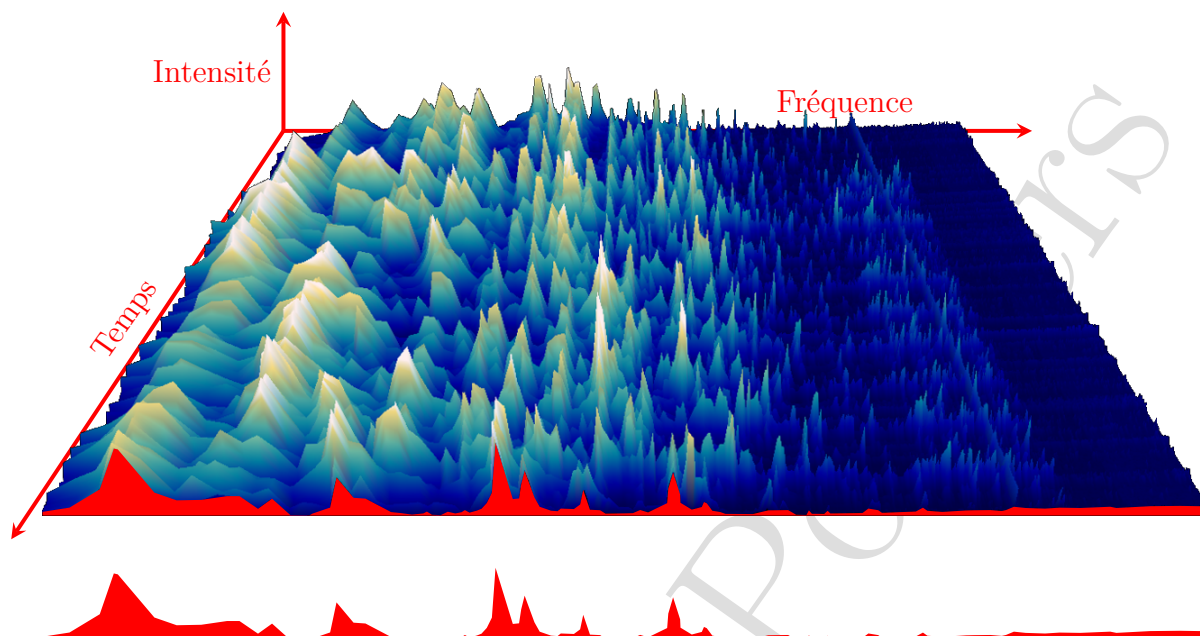
Les élèves évoquent divers termes : empreinte sonore, empreinte numérique, sonagramme, spectre... Plusieurs diagrammes existent, qui nécessitent des éclaircissements. Avec un diaporama⁴, le professeur montre comment la diffusion d'un extrait musical donné est traduite par un sonagramme 3D (temps, fréquence, intensité)⁵. Il peut être pertinent de rappeler aux élèves que les courbes observées sur des écrans (oscilloscope, ordinateur,...)

³ Voir page 57 pour en savoir plus sur le principe de fonctionnement de Shazam.

⁴ Disponible sur la plateforme, voir page 77.

⁵ Vidéo disponible sur la plateforme, voir page 77.

ne sont qu'une traduction électrique d'un phénomène mécanique : les variations de pression de l'air.



Ce sonagramme montre, au fur et à mesure que le temps passe, la variation d'intensité des fréquences qui composent le son. C'est d'ailleurs à partir de cette représentation que *Shazam* va identifier un morceau. La coupe (en rouge ci-dessus) est le spectre du son sur un court instant. Dans l'étude qui suit, on va expliquer le lien entre ce spectre et le signal sonore perçu.

4. *Shazam* : énoncé de l'étude

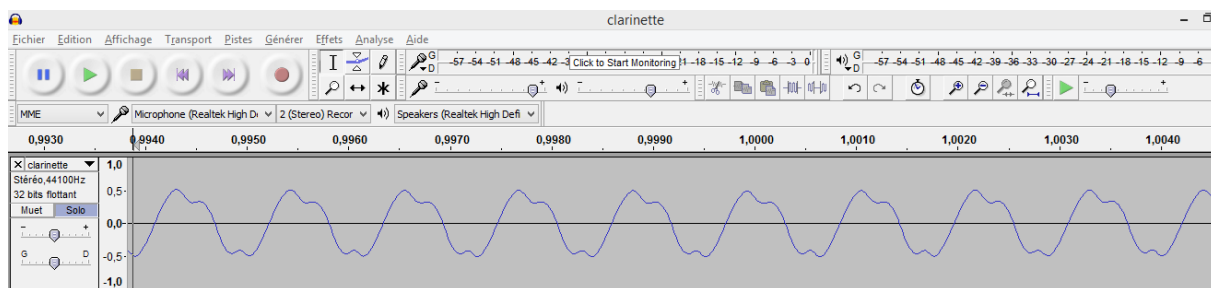
Étude – exemple de signal sonore : une note de clarinette

Suite à l'acquisition d'une note d'une clarinette sur une durée de quelques secondes, à l'aide du logiciel de synthèse sonore *Audacity* on obtient :

- une courbe représentant la pression⁶ sonore en fonction du temps, par abus de langage, on appellera *signal* cette courbe ;
- un diagramme appelé *spectre*, qui représente l'ensemble des fréquences constituant ce son et les niveaux sonores correspondants.

Le but de l'étude est de comprendre le lien entre ces deux représentations graphiques et de trouver l'expression d'une fonction dont la courbe approche au mieux ce signal.

⁶ Note pour le professeur : la relation entre intensité sonore I et pression sonore p est $I = p^2 / \rho_0 c$ où c est la célérité du son et ρ_0 la masse volumique du milieu. Le niveau de pression sonore est employé par *Audacity*, donc utile dans l'étude. Le niveau d'intensité sonore, au programme de Physique, est plus communément employé.

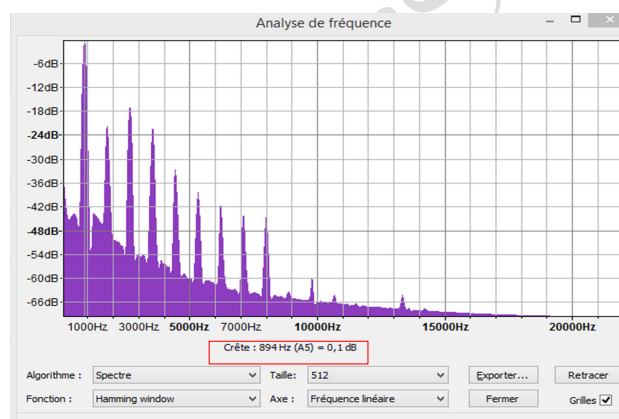


1. On lit sous le spectre l'information :

Crête : 894 Hz

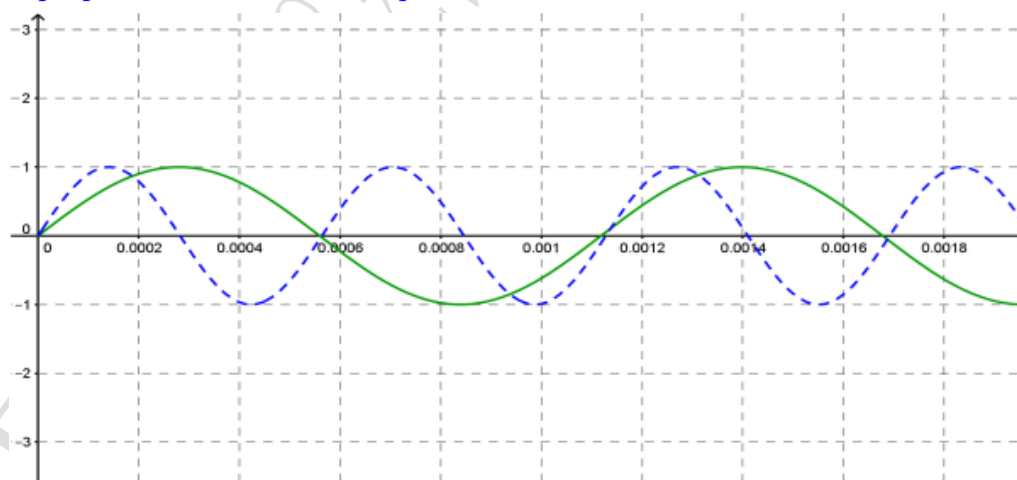
À quoi correspond cette information sur le spectre lui-même ?
Comment retrouver cette valeur sur le signal ?

2. Trouver l'expression d'une fonction qui a pour période $T = 1/894$.
Sa courbe est-elle la même que celle du signal ?



3. On a représenté ci-dessous les signaux correspondant à deux sons purs, l'un de fréquence 894 Hz et l'autre de fréquence 1788 Hz. Attribuer à chaque courbe sa fréquence.

Tracer point par point la courbe qui représente le signal du son complexe obtenu par superposition des deux sons purs.



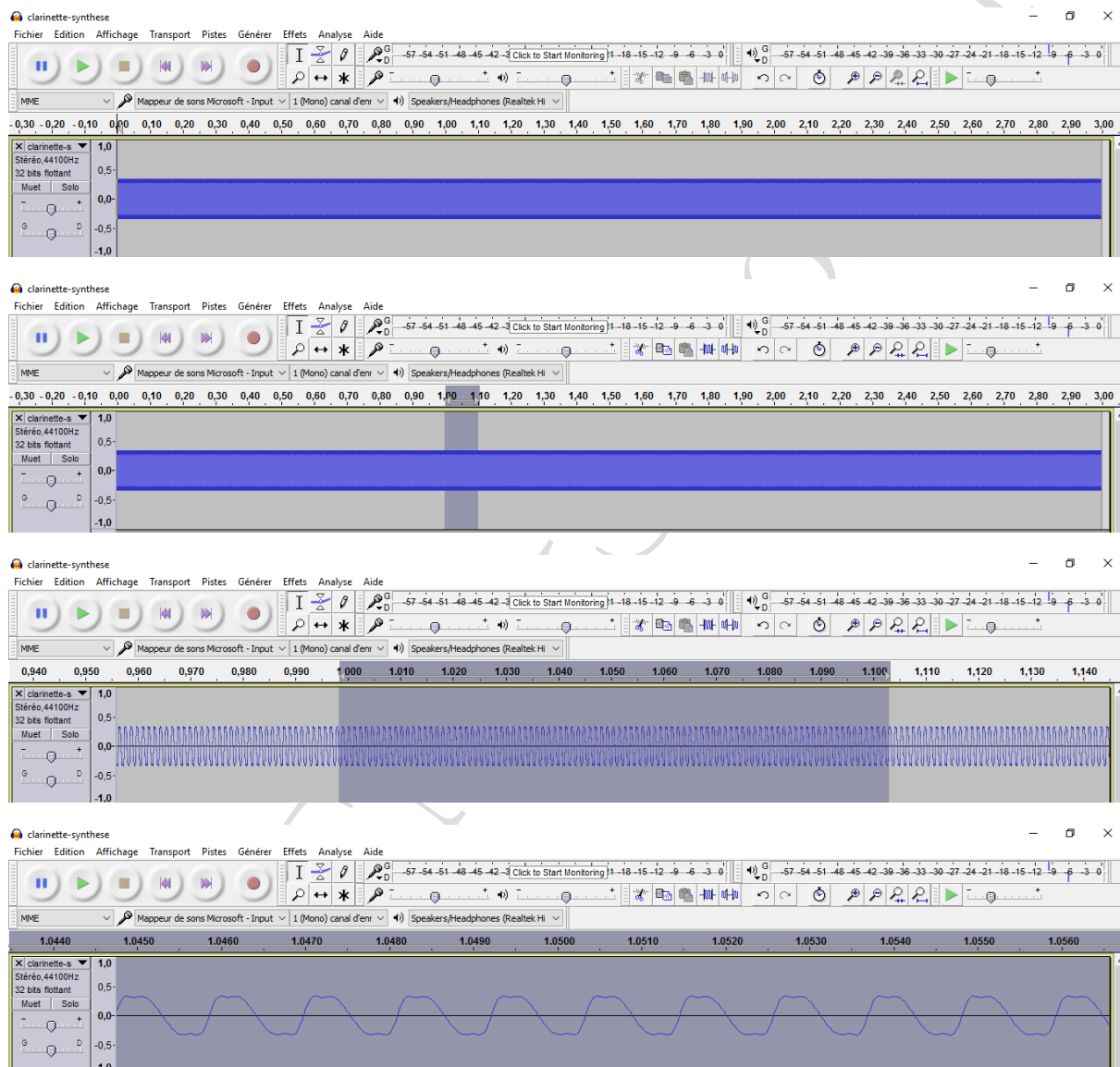
4. En vous aidant du spectre, tracer à l'aide de *Geogebra* la courbe d'une fonction qui approxime le signal correspondant au son de la clarinette.

5. Shazam : gestion de l'étude

Après l'enquête et les explications partielles du fonctionnement de *Shazam*, le professeur met les élèves en activité. Il propose l'étude d'un signal sonore particulier, celui d'une note de clarinette enregistrée pendant quelques secondes ; il serait trop complexe d'étudier en entier un morceau de musique.

Question 1

À la donnée d'un signal et du spectre qui lui est associé, la classe tente d'expliquer ce que représentent ces deux graphiques et le lien qui peut exister entre eux. Les élèves ont déjà été amenés à rencontrer la courbe sur un oscilloscope dans leurs cours de physique. Sa compréhension n'est pour autant pas si simple. La capture d'écran fournie a été faite par un logiciel libre qu'ils peuvent avoir déjà rencontré : *Audacity*. Le professeur leur fait écouter ce son de clarinette puis leur montre comment extraire la courbe donnée dans le document élèves. Pour cela, il faut sélectionner une portion du signal du fichier son⁷ et zoomer suffisamment.



Les premières discussions permettent de mettre au clair les grandeurs représentées sur chaque axe. La propagation d'une onde sonore émise par l'instrument provoque des variations de pression de l'air. Ces variations sont perçues par l'oreille (le tympan vibre et les vibrations sont transformées en un influx nerveux transmis au cerveau) ou détectées par un microphone qui procède de manière similaire, en transformant les variations de pression de l'air en différences de potentiel électrique. Le signal obtenu est donc une courbe

⁷ Ici entre 1s et 1,1s

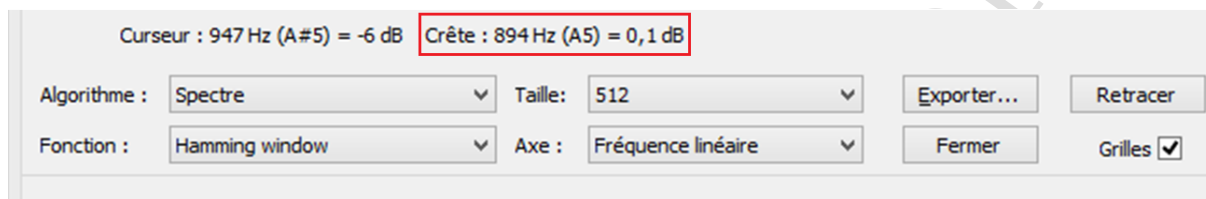
Partie B.

représentant une tension électrique en fonction du temps.

Si cette notion a déjà été travaillée en physique⁸ alors les élèves savent que le spectre est théoriquement un diagramme en bâtons avec en abscisses des fréquences appelées harmoniques du son.

Dans la pratique, les logiciels fournissent des représentations graphiques où les crêtes correspondent aux harmoniques en question.

Dans la première question, on demande ce que représente la grandeur 894 Hz et comment la retrouver sur le signal. On remarque que l'abscisse de la première crête du spectre est la fréquence que propose le logiciel sous le diagramme :

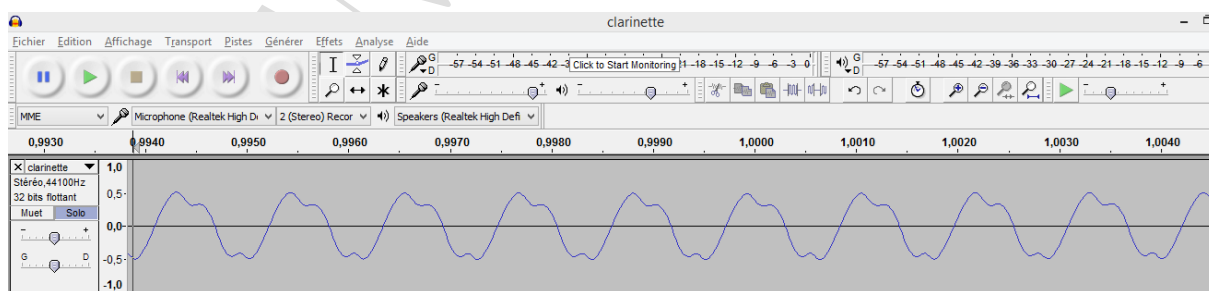


De plus, les abscisses des autres crêtes sont relativement proches des multiples de cette première fréquence, appelée fréquence du son *fondamental*.

Si la notion d'analyse spectrale a déjà été étudiée en physique, les élèves savent déjà que la présence d'un unique bâton correspond à un son *pur*. Ici, le son est *complexe*, et le spectre en fournit la décomposition en sons purs, nommés *harmoniques*, dont les fréquences sont des multiples de la fréquence du fondamental.

Les hauteurs des bâtons sont relatives, l'une ayant été choisie comme référence. *Audacity* utilise le niveau de pression sonore⁹ en dB FS (décibels Full Scale) pour lequel l'harmonique le plus présent correspond à un niveau de 0 dB FS (les autres niveaux sont donc négatifs).

En observant le signal, les élèves remarquent une reproduction régulière d'un motif, ce qui les amène à évoquer un phénomène périodique. Connaissant la relation entre la fréquence et la période, ils peuvent à l'aide de mesures sur la courbe estimer la période puis la fréquence du signal.



La mesure de huit « périodes » donnant environ 0,009s, les élèves parlent donc d'une période de 0,001 125 seconde et d'une fréquence de 889 Hz. La mesure de huit motifs plutôt que celle d'un seul permet d'obtenir une meilleure approximation de la période. Les élèves remarquent la faible différence de leur résultat avec la fréquence donnée par le logiciel.

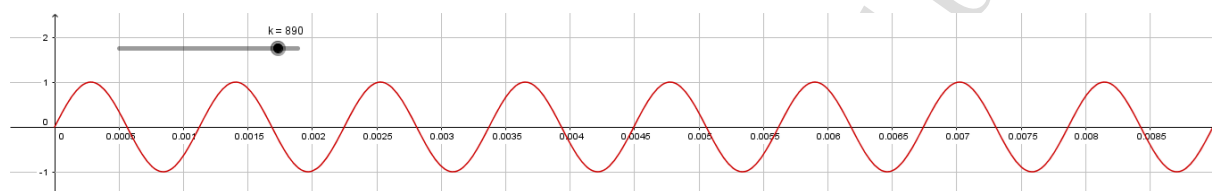
⁸ Voir page 47 où sont évoqués les programmes de physique de terminale S.

⁹ La relation entre intensité sonore I et pression sonore p est $I = p^2 / \rho_0 c$ où c est la célérité du son et ρ_0 la masse volumique du milieu.

À la suite de cette première question, une synthèse peut être faite sur la périodicité d'une fonction, avec un rappel si nécessaire de l'enroulement de la droite réelle autour du cercle trigonométrique vu en classe de première. On peut compléter ce temps de cours avec les fonctions sinus et cosinus, au programme de terminale S, qui sont des exemples de fonctions 2π -périodiques. Quelques exercices suivent le cours, permettant de travailler la notion de périodicité.

Question 2

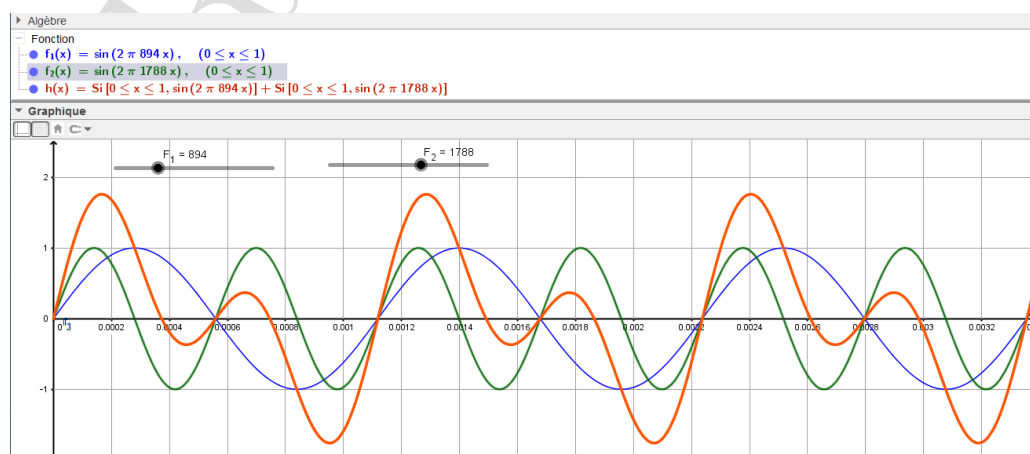
Cette deuxième partie de l'étude a pour but de trouver une expression de la fonction représentée par le signal. La définition de la fonction sinus ayant été donnée, les élèves pensent vite à l'utiliser mais doivent tester plusieurs expressions pour déterminer une fonction $1/894$ -périodique. Leur calculatrice leur permet de faire des tests, et le professeur peut les aider en leur demandant d'abord de chercher en premier lieu une fonction 1-périodique. S'il est possible de faire cette recherche en salle informatique, alors l'utilisation d'un curseur dans *Geogebra* semble plus pratique.



Dans tous les cas, les élèves se rendent vite compte que la courbe obtenue ne ressemble pas à celle du signal. C'est alors le moment de différencier un son pur d'un son complexe : on appelle son pur un son représenté par une sinusoïde. L'objectif est désormais d'ajouter deux fonctions sinusoïdales de fréquences différentes pour créer la représentation d'un son qu'on qualifiera de complexe.

Question 3

La superposition de deux sons correspond mathématiquement à la somme de deux fonctions. On visualise alors la courbe obtenue en ajoutant deux fonctions sinusoïdales de fréquences respectives 894Hz (fréquence du fondamental fourni par *Audacity*) et 1 788Hz (son double, qui est théoriquement la fréquence du deuxième harmonique). Une construction point par point permet d'observer que la courbe obtenue n'est pas une sinusoïde tout en restant périodique. Le travail à la main est un peu long mais utile. On le complète par l'utilisation du logiciel *Geogebra* en montrant de manière dynamique ce qui se passe quand on ajoute deux fonctions sinusoïdales de fréquences variables.



Partie B.

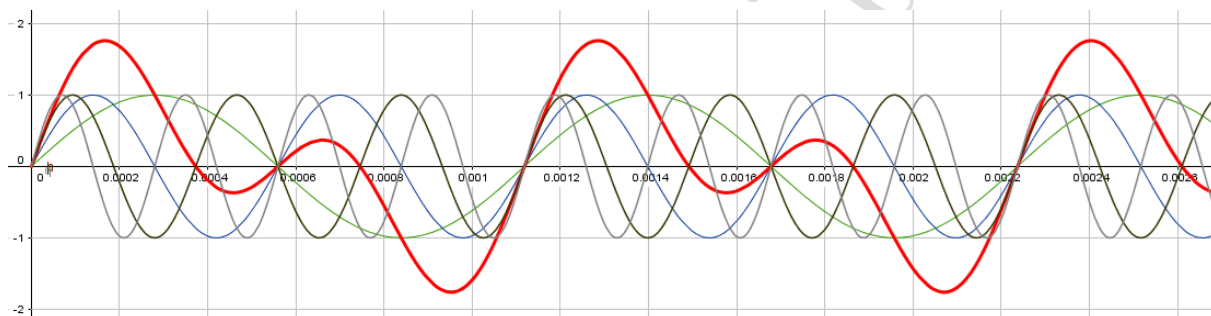
Le professeur fait alors une synthèse sur les sommes de fonctions et les fonctions associées¹⁰ en général.

En reprenant le tracé avec *Geogebra* de la courbe représentant le signal du son complexe, superposition des deux sons purs de fréquences 894 Hz et 1788 Hz, on observe un signal dont on peut démontrer qu'il a pour fréquence 894 Hz.

Question 4

Pour conclure cette étude, on reconstitue le son de la clarinette.

Le travail effectué à la question précédente avec *Geogebra* permet d'envisager cette reconstitution en ajoutant des fonctions sinusoïdales de fréquences multiples de la fréquence du fondamental (894 Hz, 1788 Hz, 2682 Hz, 3576 Hz...). Pour certains élèves, un premier essai consiste à ajouter des fonctions sinusoïdales affectées du coefficient 1 : ils se rendent vite compte d'un problème d'amplitude de la courbe obtenue. Ce qui amène à se poser des questions sur l'utilité des valeurs lues sur l'axe des ordonnées du spectre.



Des élèves proposent alors d'affecter à chacune des sinusoïdes le coefficient lu sur l'axe des ordonnées du spectre. Ils observent qu'ils sont négatifs. Le professeur doit alors expliquer que le logiciel *Audacity* donne des coefficients relatifs, le premier étant théoriquement égal à 0. Un essai de reconstitution du signal avec ces valeurs s'avère insatisfaisante.

L'explication doit être poursuivie : les coefficients lus sur le spectre ne sont pas ceux qu'on utilisera directement dans la formule du signal de reconstitution du son. En effet, sur le spectre fourni par *Audacity*, on lit en ordonnée le niveau de *pression sonore*, issu de la formule $N = 20 \log(a/512)$ avec :

- N : niveau de pression sonore en dB FS (décibels *Full Scale*) ;
- a : pression sonore en Pascal ;
- 512 : taille de l'échantillon affiché dans la fenêtre *analyse de fréquence*.

On peut signaler aux élèves la raison de l'usage du niveau sonore N à la place des mesures de pression sonore a : la disparité des ordres de grandeur des nombres a (d'un facteur 1 à 10 au moins) rend nécessaire l'utilisation d'une échelle logarithmique pour représenter le spectre.

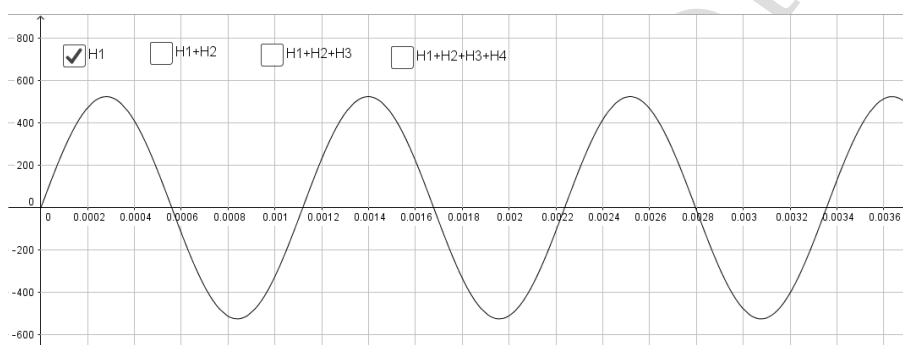
Or pour la reconstitution du signal, les fonctions sinusoïdales doivent être respectivement affectées des valeurs de a . Il faut donc déterminer a avec la relation $a = 512 \times 10^{N/20}$. Une justification sera donnée plus tard dans l'année lors de l'étude des fonctions logarithmes. Un tableau peut être fait pour aider à retrouver les coefficients nécessaires à la reconstitution du son.

¹⁰ $g(x) = f(kx)$; $h(x) = kf(x)$ et $l(x) = f(x + k)$ avec k réel.

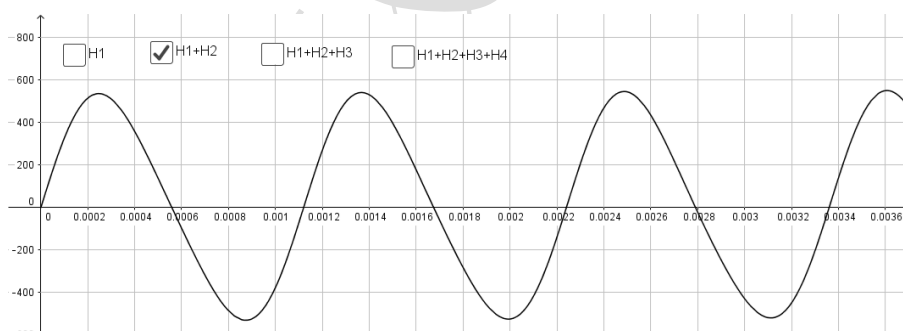
Niveau de pression sonore N (en dB FS) lu sur <i>Audacity</i>	Coefficients a_i calculés	Fréquence F_i (en Hertz) multiples du fondamental	Expression $a_i = \sin(2\pi F_i x)$ en fonction de x et des nombres a_i et F_i
0,2	523,9	894	$523,9 \sin(2\pi \times 894x)$
-19,7	53	1 788	$53 \sin(2\pi \times 1788x)$
-16,6	75,7	2 682	$75,7 \sin(2\pi \times 2682x)$
-22	40,7	3 576	$40,7 \sin(2\pi \times 3576x)$

Les élèves peuvent désormais sommer les expressions afin de reconstituer le signal.

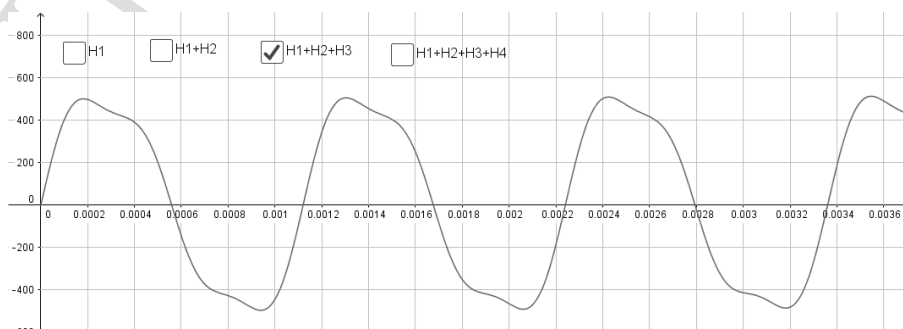
Un seul harmonique (le fondamental) donne la courbe d'équation $y = 523,9 \sin(2\pi \times 894x)$:



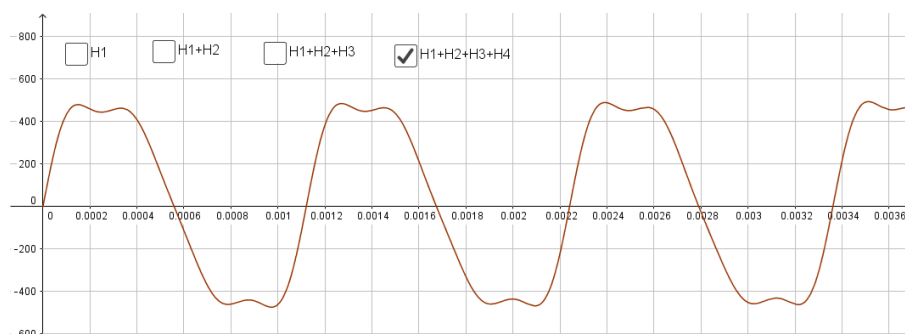
La somme de deux harmoniques donne :



La somme de trois harmoniques donne :



La somme de quatre harmoniques permet déjà de reconnaître l'allure de la courbe du signal.



Il est possible également avec *Geogebra* d'entendre un son associé une fonction.¹¹ On peut donc écouter le son obtenu avec la somme de quatre harmoniques et le comparer au son initial de la clarinette.

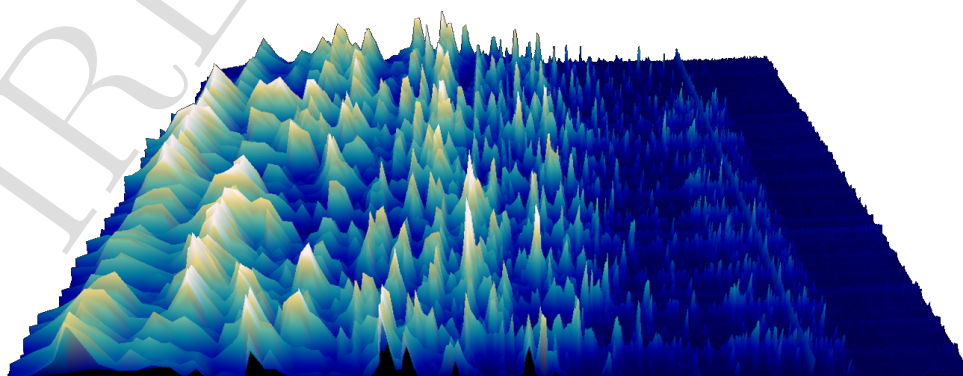
6. Retour sur le fonctionnement de Shazam

À l'issue de cette étude, les élèves sont désormais familiarisés avec la notion de spectre. Le professeur peut, s'il le souhaite, exposer les grandes lignes du fonctionnement de *Shazam*, dont la notion de marqueur.

L'explication du fonctionnement de l'application Shazam qui suit est inspirée d'un article¹² de Avery Li-Chun Wang, ingénieur de Shazam.

a. Création de l'empreinte d'un morceau

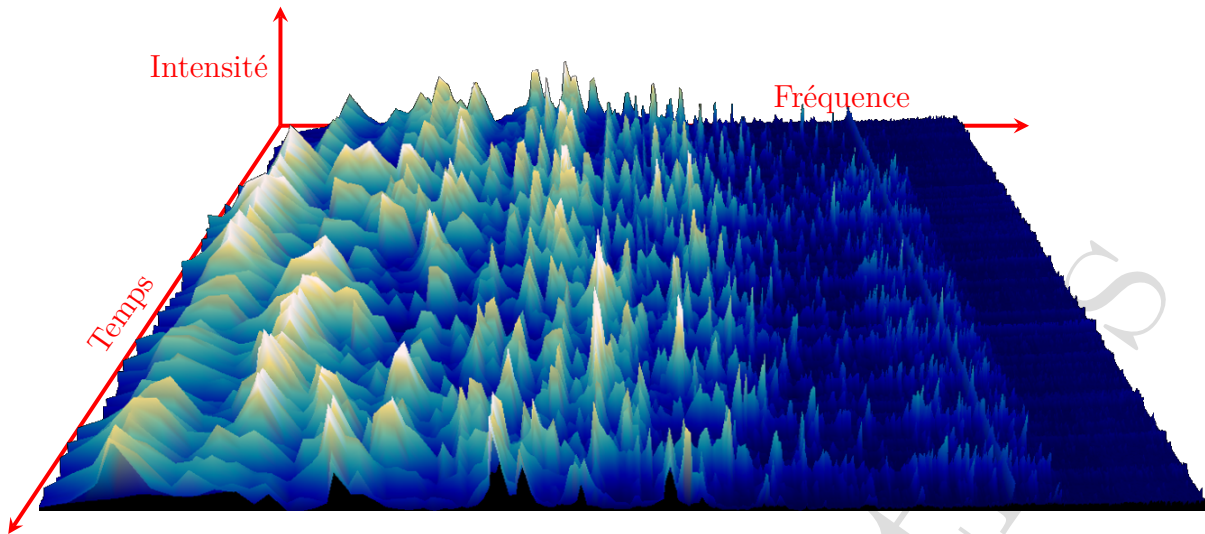
Lors de l'écoute d'un son, d'un morceau, trois paramètres interviennent : le temps (moment d'écoute), la fréquence et, associé à ces deux paramètres, l'intensité. Ainsi, la connaissance de l'évolution de ces trois paramètres définit entièrement un morceau. On peut se représenter cela sous la forme d'un graphique en trois dimensions – le sonagramme – donnant l'intensité en fonction du couple (temps ; fréquence).



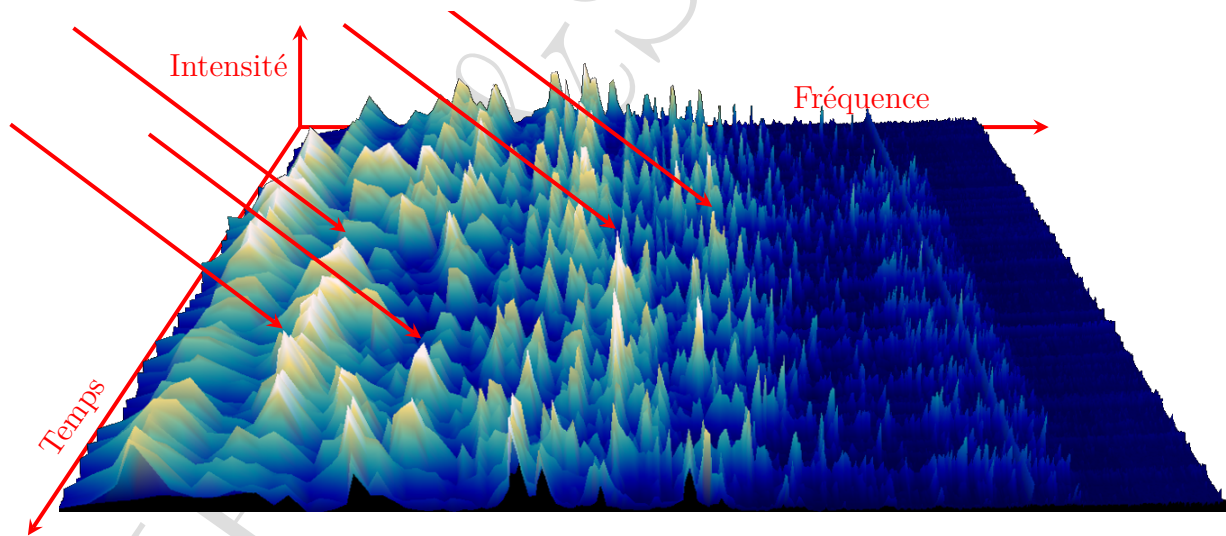
Obtenu grâce au logiciel [PrettyFastFFT](#)

¹¹ Commande *JouerSon*[<Fonction>,<Valeur Min>,<Valeur Max>]

¹² An Industrial-Strength Audio Search Algorithm : <http://www.ee.columbia.edu/~dpwe/papers/Wang03-shazam.pdf>



L'ensemble de ces triplets forme alors l'empreinte d'un morceau. Pour reconnaître un morceau dans une base de donnée, il faudrait être à même de comparer cette empreinte à des millions d'autres. Encore faudrait-il que l'intensité soit la même, qu'il n'y ait aucun bruit parasite. . . Le principe de *Shazam* est alors de simplifier cette empreinte afin d'isoler un certain nombre de marqueurs et de ne plus tenir compte de l'intensité. Ainsi, le nombre de données à collecter, à stocker et à comparer sera significativement réduit.

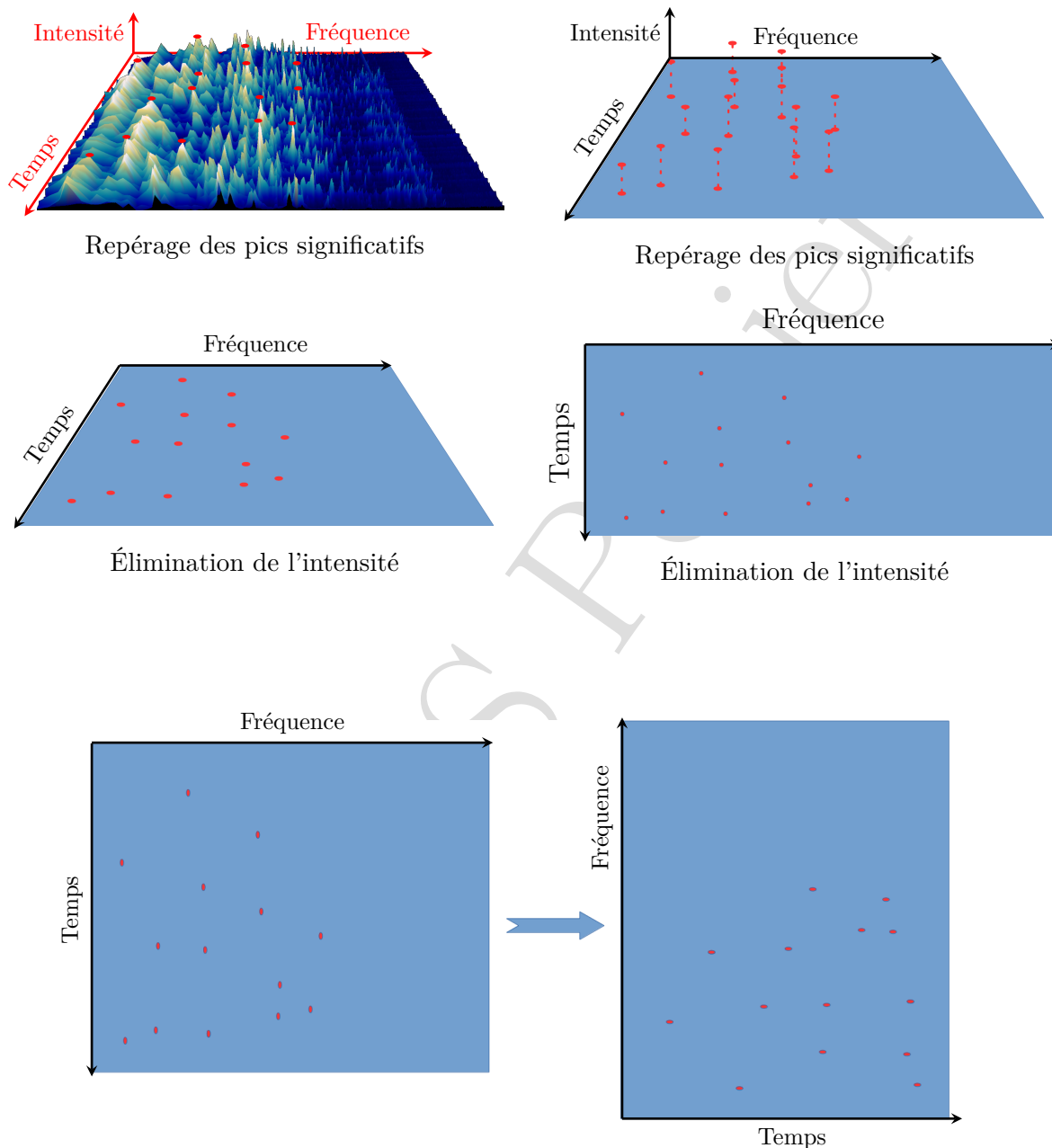


Repérage des pics significatifs

La première étape consiste à repérer les pics significatifs, c'est-à-dire les triplets (temps ; fréquence ; intensité) pour lesquels l'intensité augmente « brusquement » par rapport aux points du voisinage.

Partie B.

On ne conserve alors que les couples (temps ; fréquence) de ces pics. On élimine ainsi le problème lié au niveau sonore qui peut varier entre le morceau référencé et le morceau écouté.



Le morceau est alors réduit à une série de couples (temps ; fréquence)¹³.

b. Comparaison entre morceaux

On a maintenant un algorithme permettant de déterminer une empreinte simplifiée d'un morceau écouté et une base de données comportant les empreintes de millions de morceaux extraites par ce même algorithme.

¹³ Une telle représentation se retrouve sur les sonagrammes colorés par lignes de niveaux.

Il reste à mettre en correspondance le morceau écouté et le morceau référencé sachant que l'écoute ou la recherche ne commence pas dès le début du morceau. Afin de gérer cette différence temporelle, *Shazam* associe des couples de marqueurs (par exemple $(t_1 ; f_1)$ et $(t_2 ; f_2)$) pour former un triplet $(f_1 ; f_2 ; t_2 - t_1)$ en créant ainsi de nouveaux marqueurs éliminant le problème de l'instant d'écoute absolu.

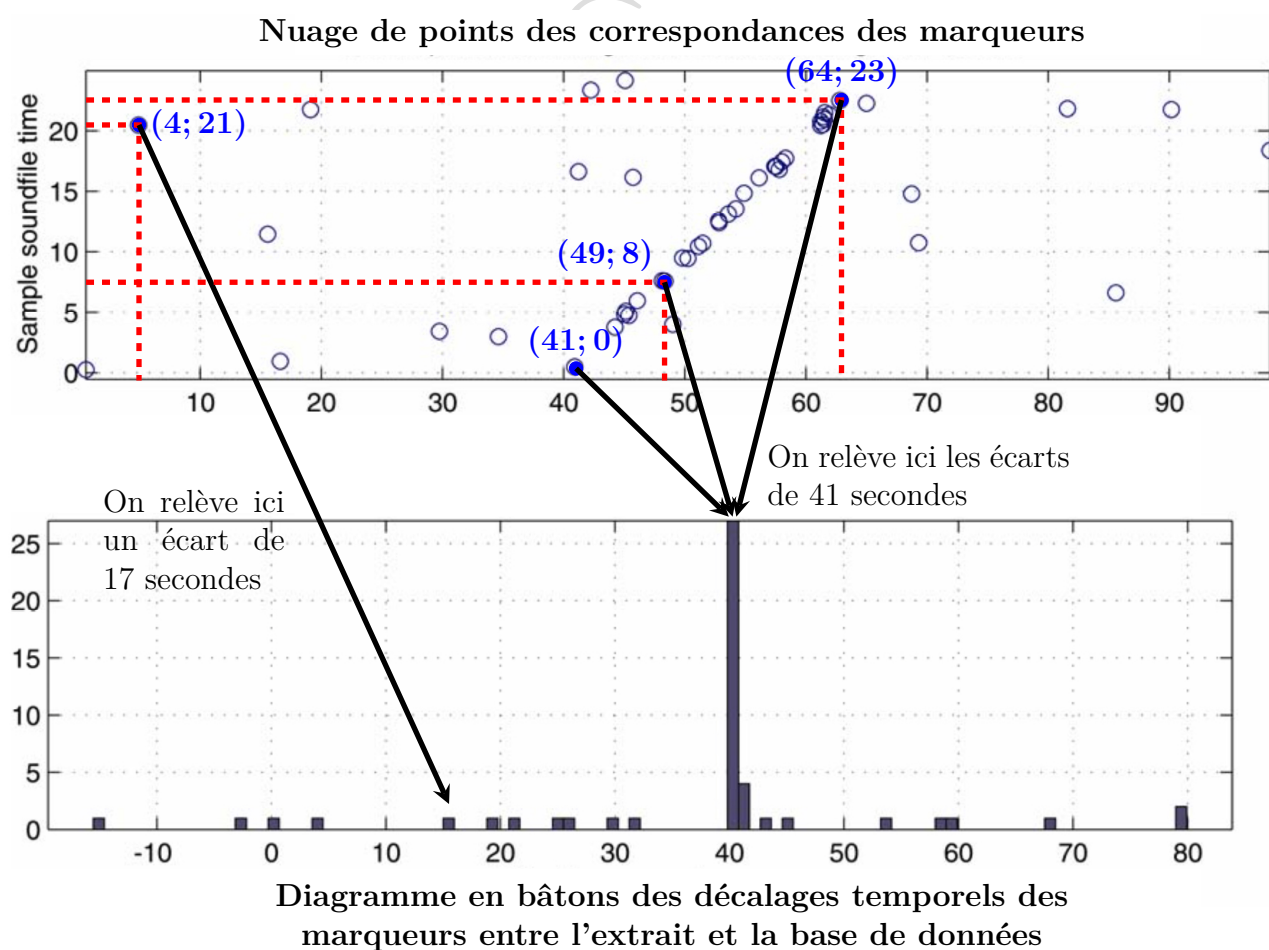
La comparaison se fait alors statistiquement de la façon suivante.

Le premier graphique ci-dessous fait apparaître tous les marqueurs communs au morceau écouté et à un morceau de la base de données.

- En abscisse, l'instant auquel apparaît le marqueur sur le morceau de la base de données.
- En ordonnée, l'instant auquel apparaît le marqueur sur le morceau écouté.

Le deuxième graphique représente un diagramme en bâtons recensant la différence « ordonnée moins abscisse ».

Si on retrouve une classe modale dont l'effectif « tranche » avec les autres classes, alors on peut en déduire que les deux morceaux correspondent. On peut de plus déterminer le début d'écoute du morceau (ici la quarante et unième seconde).



7. Conclusion

Un travail plus technique et purement mathématique termine ce parcours. Les élèves sont amenés à faire l'étude complète d'une fonction trigonométrique (parité, périodicité, dérivée, équations trigonométriques, variations...).

En sus des classiques exercices nécessaires à l'acquisition des techniques figurant dans tous les manuels, nous proposons quatre situations variées¹⁴ où une modélisation par les fonctions trigonométriques s'avère pertinente.

Tout ce travail aura nécessité deux semaines en classe et aura permis aux élèves de comprendre l'utilité des fonctions trigonométriques et de faire des liens avec le cours de physique. Nous espérons développer chez ces élèves des compétences d'engagement dans une activité de recherche. La diversité (non exhaustive !) des exercices proposés met en évidence l'importance des phénomènes périodiques et, au-delà, illustre selon la célèbre formule du physicien Eugène Wigner la *déraisonnable efficacité des mathématiques*.

¹⁴ Voir la banque d'exercices page 62.

8. Banque d'exercices

On propose ci-dessous des trames d'exercices que chaque professeur pourra adapter à ses élèves et ses objectifs.

Exercice 18 : le Tapis magique au Futuroscope

Au Futuroscope, une des attractions est le tapis magique (regarder sur le site du Futuroscope ce qu'est cette attraction). Elle est entourée de cylindres creux en PVC coupés en biais en leur sommet par une section plane.



On se propose de rechercher le patron d'un tel tuyau.

Représenter le patron tel que vous l'imaginez.

Partie A : comprendre le problème, une expérience à faire chez soi



Prendre une bougie et l'entourer d'une bande de papier avec éventuellement un peu de ruban adhésif pour éviter que le papier ne bouge. Une fois entourée, couper suivant une section plane l'ensemble. En déroulant le papier on obtient une courbe.

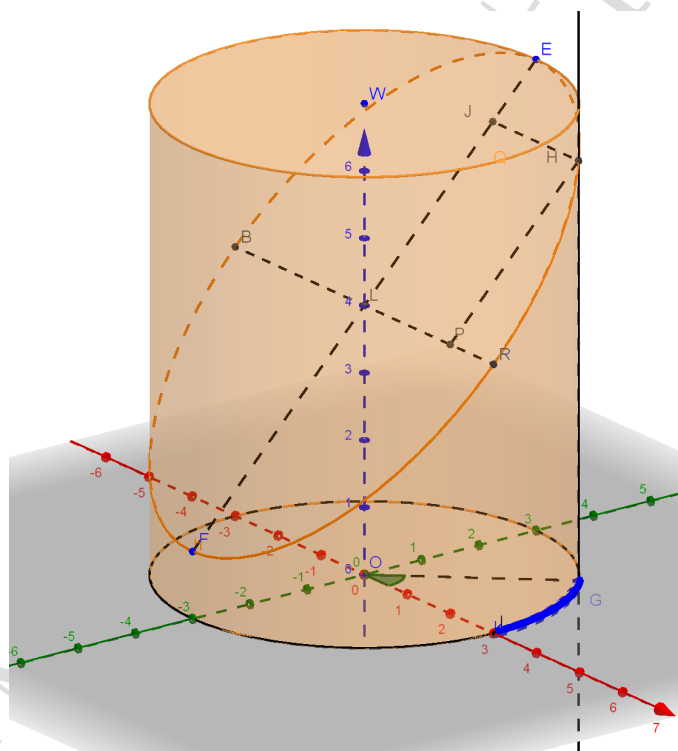
À quoi ressemble cette courbe ? À quoi ressemble la section de la bougie ?

Partie B ¹⁵

La hauteur du tuyau n'est pas fondamentale pour notre problème mais on s'impose que le cylindre ait pour rayon 3 cm et que le plan de section $\mathcal{P}$ forme un angle de 45° avec le plan horizontal.

On se place dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'axe du cylindre est (Oz) et ce cylindre a pour rayon 3. Nous avons choisi une équation du plan $\mathcal{P}$ à savoir : $y - z + 4 = 0$ qui forme bien un angle de 45° avec le plan horizontal.

1. Traçons dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ le cercle de centre O et de rayon $R = 3$.
Justifier que chaque point G du cercle a pour coordonnées $(R \cos(\alpha); R \sin(\alpha); 0)$, α étant une mesure de l'angle $(\vec{OI}, \vec{OG})$.



2. La droite (Δ) parallèle à (Oz) passant par G est appelée une génératrice du cylindre. Donner une équation de (Δ) .
3. (Δ) coupe le plan $\mathcal{P}$ au point H .
Montrer que les coordonnées de H sont $(3 \cos(\alpha); 3 \sin(\alpha); 3 \sin(\alpha) + 4)$.
Justifier que $GH = 3 \sin(\alpha) + 4$.
4. En déduire que si ℓ désigne la longueur de l'arc $\widehat{IG}$, alors $GH = 3 \sin\left(\frac{\ell}{3}\right) + 4$.
5. Soit g définie par $g(\ell) = 3 \sin\left(\frac{\ell}{3}\right) + 4$ pour ℓ dans $[0; 6\pi]$.
Déterminer les extrema de g et les valeurs de ℓ correspondantes¹⁶.
6. Réaliser alors le patron du tuyau sans son « couvercle ».

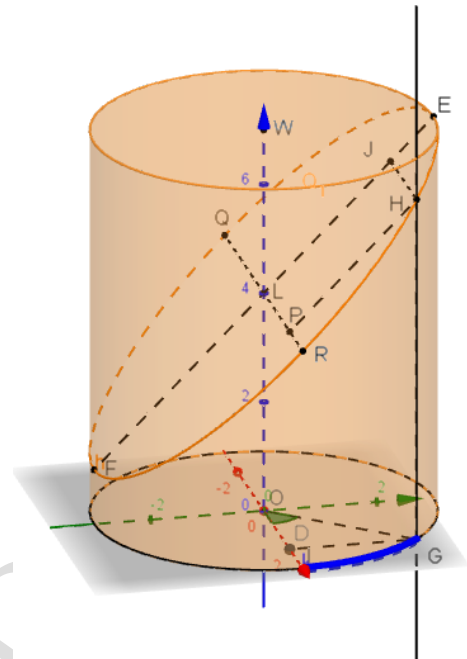
15 Si besoin, consulter le fichier *Geogebra*

16 Démontrer que GH est minimale quand $\ell = \frac{3\pi}{2}$ et maximale quand $\ell = \frac{\pi}{2}$.

Partie C : construction de la section en vraie grandeur

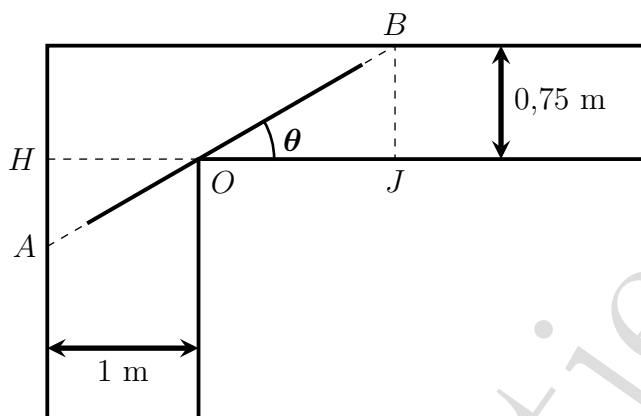
Notons E et les F les points de la section de cotes maximale et minimale.

1. Soit L le milieu de $[EF]$. Justifier que L est sur (Oz) .
2. La parallèle à (Ox) passant par L coupe la section en R et Q .
Dans le plan $\mathcal{P}$ on appelle J et P , les projections orthogonales de H sur (EF) et (RQ) .
Démontrer que $JH = OD = 3 \cos(\alpha)$ où D est la projection orthogonale de G sur (Ox) .
3. Démontrer que $LJ^2 = HP^2 = 18 \sin^2(\alpha)$.
En déduire que si on note $u = PH$ et $v = JH$, on a : $u^2 + \frac{v^2}{2} = \frac{1}{9}$.
4. Tracer avec *Geogebra* la courbe d'équation $u^2 + \frac{v^2}{2} = \frac{1}{9}$ qu'on appellera ellipse. C'est le couvercle!
5. Achever le patron.



Exercice 19 : une plaque de verre dans un couloir

La figure ci-dessous représente un couloir (vu d'en haut).

**Le problème est simple**

J'ai une plaque de verre rigide (d'épaisseur négligeable) de 2,5 mètres de long.

Problème ouvert

1. Est-il possible de négocier le virage sans détériorer les murs ?
2. Quelle est la longueur maximale de la plaque de verre pouvant franchir le virage ?

Problème guidé

Les triangles OAH et OBJ sont rectangles en H et J . On note θ l'angle $(\overrightarrow{OJ}; \overrightarrow{OB})$. Ainsi, $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

1. Montrer que $AB = \frac{0,75}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}$
2. Dans la suite, on note $L(\theta) = \frac{0,75}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta}$ la fonction donnant la longueur maximale en mètres de la plaque de verre en fonction de l'angle θ .
Montrer que $L'(\theta) = \frac{0,75 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \times \left(-1 + \frac{4}{3} \tan^3 \theta\right)$.

Rappel

Pour tout $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$.
De plus, $\tan$ est strictement croissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et on a

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
Variations de $\tan$	0	1	$+\infty$

3. (a) On pose $f(\theta) = -1 + \frac{4}{3} \tan^3 \theta$. Montrer que f est strictement croissante sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
(b) Montrer que f s'annule une seule fois pour une valeur de $\alpha \approx 0,738$.
(c) En déduire que L admet un minimum sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.
4. Une plaque de verre de 2,5 mètres peut-elle passer dans ce couloir sans détériorer les murs ?

Exercice 20 : fonctionnement d'une scie sauteuse¹⁷

La scie sauteuse est une machine électroportative polyvalente qui permet de scier avec précision la plupart des matériaux et de réaliser tous les types de coupes : droites, courbes, en biais...

La scie sauteuse est constituée d'un moteur qui anime une lame d'un mouvement de va-et-vient. Elle est conçue pour découper principalement le bois, les dérivés du bois, les métaux et les plastiques durs.

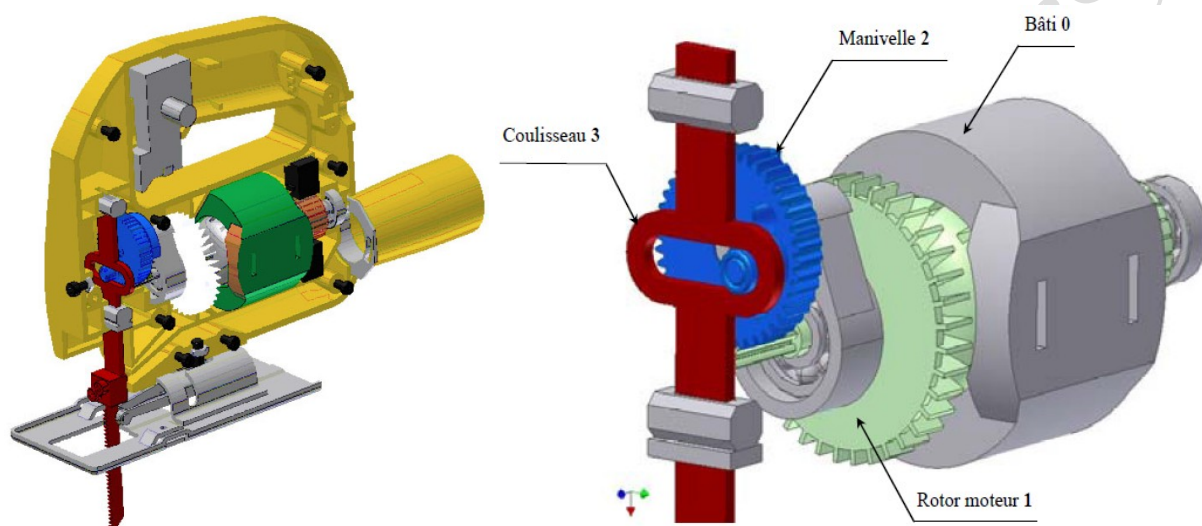


Schéma de la scie sauteuse

Détail de la partie à étudier

Lorsque la scie sauteuse est en marche, elle fait tourner la manivelle 2 qui transmet un mouvement de va-et-vient à la lame de la scie.

Une molette de réglage de la scie permet de faire varier la vitesse de rotation de la manivelle 2. Le tableau suivant donne les fréquences de rotation de la manivelle en fonction de la position de la molette de réglage :

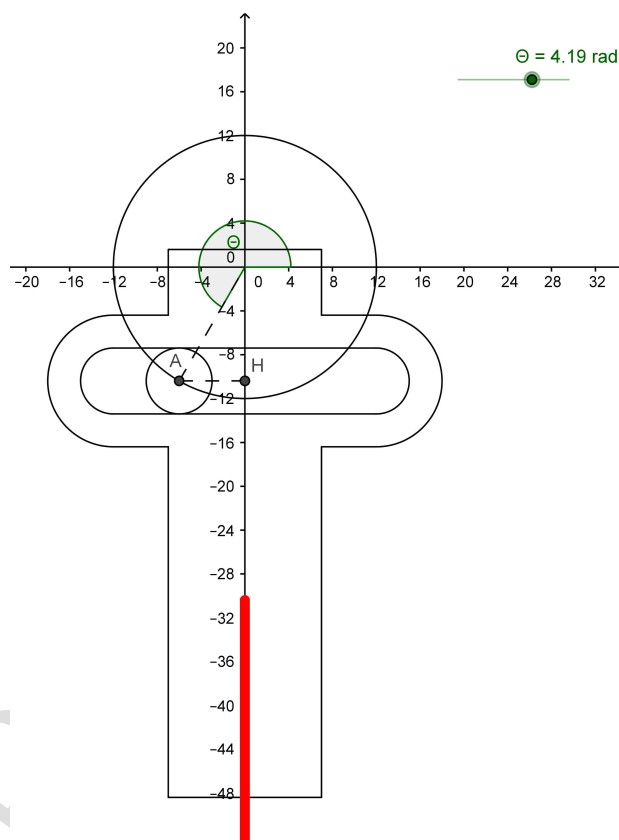
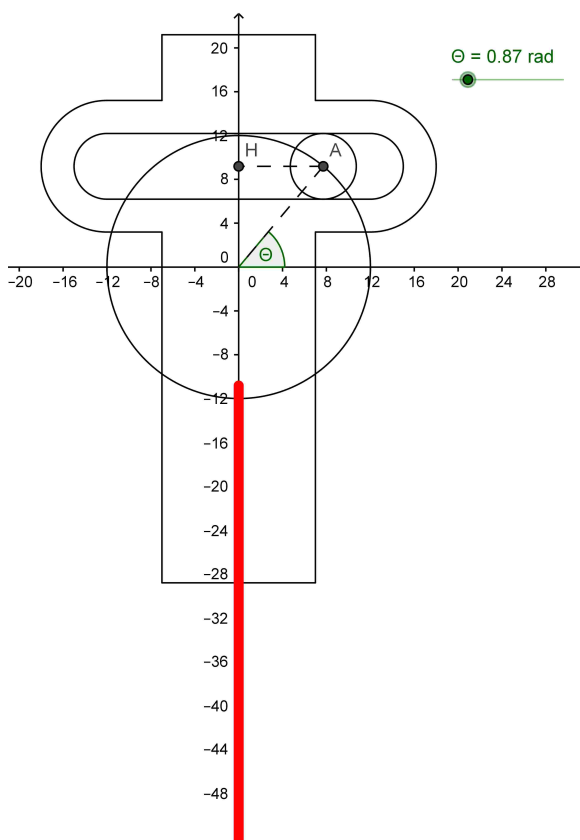
Position de la molette	Fréquence de rotation F en tours.min ⁻¹
1	500
2	1000
3	1400
4	2000
5	2500
6	3100

Avec l'animation *Geogebra*¹⁸ on voit que lorsque la manivelle tourne, le point A décrit un cercle de centre O et de rayon 12 mm. Ainsi le coulisseau décrit une course verticale de 12 mm vers le haut et 12 mm vers le bas par rapport au point O .

¹⁷ Exercice inspiré du document http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/30/1/Document_ressource_Maths_1ere_STI2D_232301.pdf

¹⁸ Voir le fichier *scie_sauteuse-schema_anime.ggb*

Partie B.



But de l'exercice

Lorsque la vitesse de coupe dépasse $1,5 \text{ m.s}^{-1}$, la découpe de plastique dur tel que le plexiglas devient impossible car il y a un échauffement trop important du matériau et donc un risque de fonte de celui-ci.

Le but de cet exercice est de déterminer, pour la scie sauteuse choisie, la fréquence de rotation afin que la vitesse maximale de coupe n'excède pas $1,5 \text{ m.s}^{-1}$ et donc la position de la molette.

La vitesse de coupe est celle du point H .

Position de la molette	Fréquence de rotation F en tours.min ⁻¹	Vitesse maximale de la lame
1	500	
2	1000	
3	1400	
4	2000	
5	2500	
6	3100	

1. Exprimer y_H en fonction de l'angle θ .
2. Après avoir déterminé le temps mis par le point A pour qu'il fasse un tour complet, exprimer y_H en fonction du temps t .
3. En déduire la vitesse instantanée du point H en fonction du temps.
4. Conclure¹⁹.

19 On pourra faire remarquer aux élèves que dans la formule $y'_H(t) = 4.10^{-4}\pi F \cos\left(\frac{\pi F}{30}t\right)$ les extrema

Commentaire pour la question 2.

Pour éviter l'utilisation des vitesses angulaires, on peut remarquer que l'angle parcouru est proportionnel au temps (avec une fréquence de rotation F en tours par minute) :

- un tour complet en $\frac{1}{F}$ minute
- l'angle $\theta = \frac{\pi F}{30} t$

On peut le visualiser avec le tableau de proportionnalité suivant :

Angle parcouru	Temps mis pour parcourir l'angle
F tours	1 minute
F tours	60 secondes
$2\pi F$ radians	60 secondes
$\frac{\pi F}{30}$ radians	1 seconde
$\frac{\pi F}{30} t$ radians	t secondes

On arrive à la formule :
 $y_H(t) = 12 \cdot 10^{-3} \sin \left(\frac{\pi F}{30} t \right)$.

sont atteints pour une valeur du cosinus égale à -1 ou 1 .

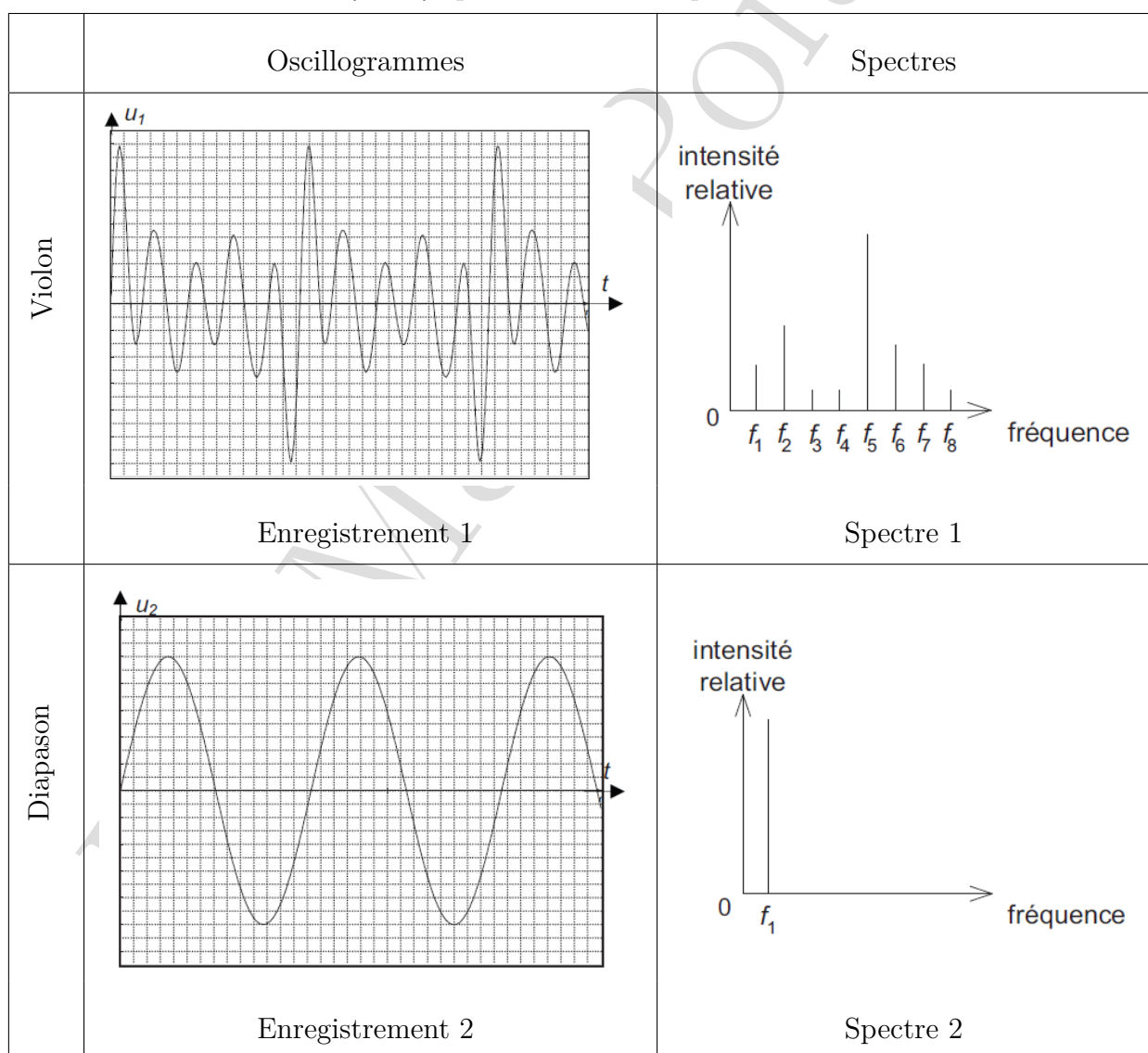
Exercice 21 : les violons²⁰

Avant de débiter un concert, les instrumentistes doivent accorder leurs instruments. Le chef d'orchestre dispose de repères techniques simples mais efficaces pour vérifier la justesse des sons émis par l'orchestre.

Partie A : un violon

La figure ci-dessous représente les enregistrements réalisés dans les mêmes conditions, de sons de fréquence $f_1 = 440$ Hz (la3) émis par un violon d'une part et par un diapason d'autre part.

1. Parmi les caractéristiques physiques d'un son musical figurent la hauteur et le timbre. En analysant les deux oscillogrammes de la figure ci-dessous, préciser la caractéristique physique qui différencie les sons des deux émetteurs.
2. Quel nom donne-t-on à la fréquence f_1 ?
3. Calculer les valeurs f_2 et f_3 présentes dans le spectre du violon.



²⁰ Reprise et complément du sujet de Baccalauréat scientifique de Physique spécialité Métropole 2011

Partie B : ensemble de violons

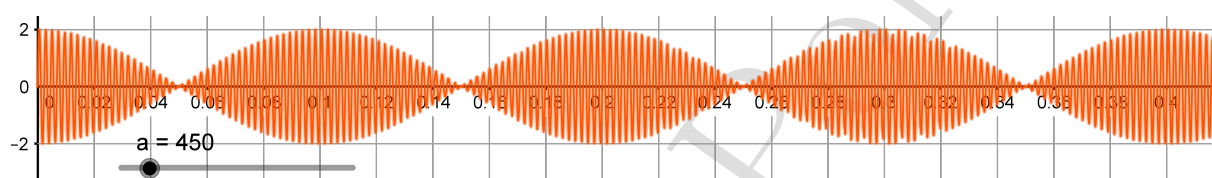
Les battements

Avant le concert, les violonistes cherchent à accorder leur instrument en jouant la note la3 de fréquence égale à 440 Hz. La fréquence émise par chaque instrument n'étant pas rigoureusement égale à 440 Hz, le son résultant de la superposition des notes émises par chaque violon est alternativement plus ou moins intense : on entend des battements qui sont des variations périodiques de l'amplitude sonore.

Pour rendre compte de ce phénomène, on simule à l'aide de GeoGebra la superposition de deux signaux sinusoïdaux : cela revient à ajouter les fonctions $t \mapsto \sin(2\pi 440t)$ et $t \mapsto \sin(2\pi at)$ où a est modifiable sur le fichier²¹.

Notons qu'il est également possible avec GeoGebra d'entendre le son associé à une sinusoïde²².

L'enveloppe de la courbe que l'on voit ci-dessous illustre bien l'idée de battements.



On va expliquer ce que se passe quand un musicien tente de s'accorder avec un son de référence (autres instruments, diapason, ...)

1. Démontrer que $F : x \mapsto \sin(2\pi fx)$ est $\frac{1}{f}$ -périodique.
2. On va rechercher la fréquence du son obtenu en superposant deux sons purs dont chaque fréquence est un nombre entier.

(a) Cas général

Soient f_a et f_b deux entiers naturels non nuls. On pose $d = \text{PGCD}(f_a, f_b)$.

Démontrer que $G : t \mapsto \sin(2\pi f_a t) + \sin(2\pi f_b t)$ est $\frac{1}{d}$ -périodique.

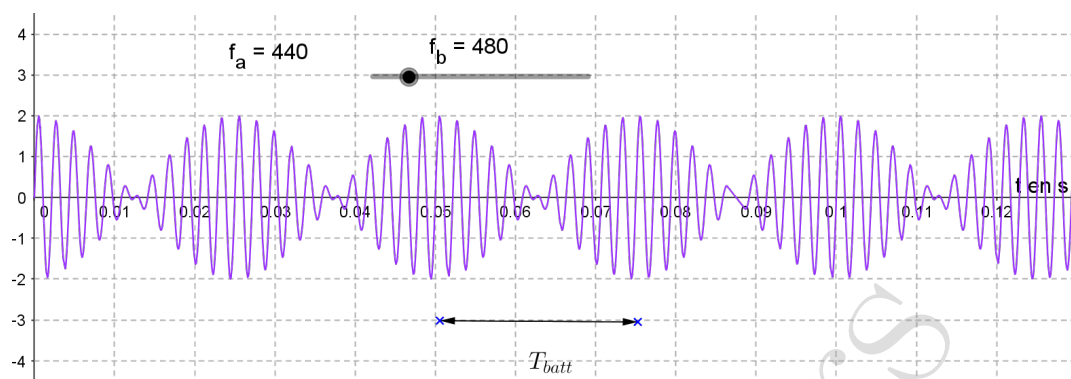
Indication : comme f_a et f_b sont des multiples de d , on écrira $f_a = dx$ et $f_b = dy$.

(b) Cas particulier

Déduire de la question 2.(a) que dans le cas où $f_a = 440$ Hz et $f_b = 480$ Hz, le son obtenu par superposition a pour fréquence $f_b - f_a$ qu'on note f_{batt} . Contrôler ce résultat avec le graphique ci-dessous, qui représente la fonction G dans ce cas particulier. Conjecturer le comportement de l'amplitude du son obtenu.

²¹ Voir fichier courbes_battements_violon.ggb sur le site IREM à l'aide d'un curseur

²² Commande `JouerSon[<Fonction>, <Valeur Min>, <Valeur Max>]`.



(c) Avec le fichier GeoGebra

Faire tendre f_b vers 440 à l'aide du curseur. Que constate-t-on ?

Comment le musicien juge-t-il que son instrument est correctement accordé ?

Niveau sonore et intensité

Au début du concert, un groupe musical comportant dix violons se produit. On rappelle que le niveau sonore, exprimé en décibels (dB) d'une source sonore d'intensité I_0 est donné par la formule :

$$L_1 = 10 \log \left(\frac{I_1}{I_0} \right)$$

Avec : I_0 : Intensité de référence correspondant à l'intensité minimale audible : $1,0 \times 10^{-12} \text{ W.m}^{-2}$;

I_1 : Intensité sonore donnée par une source sonore en W.m^{-2} .

Soit pour n sources sonores identiques :

$$L_n = 10 \log \left(\frac{nI_1}{I_0} \right)$$

1. Vérifier que le niveau sonore minimal perceptible est de 0 dB.
2. On estime à 70 dB le niveau sonore produit par un seul violon à 5 m. Calculer le niveau sonore produit par le groupe musical. On considère que tous les violons sont à 5 m de l'auditeur.
3. L'exposition à une intensité sonore $I = 1,0 \times 10^{-1} \text{ W.m}^{-2}$ peut endommager l'oreille de l'auditeur. Combien de violons doivent jouer pour atteindre cette intensité pour un auditeur situé à 5 m ? Conclure.

IREM&S Poitiers

Partie C.

Annexes

L'enseignement des mathématiques par parcours

De nombreux rapports et études déplorent depuis la fin des années 1990 la perte de sens et le désintérêt au collège et au lycée pour les sciences en général et les mathématiques en particulier.

L'IREM&S de Poitiers a orienté ses recherches depuis 2005 afin de redonner du sens aux mathématiques enseignées du cycle 3 à la Terminale, pour montrer que cette discipline n'est pas qu'un passage obligé de la réussite scolaire en France mais qu'elle permet, en interaction avec d'autres sciences, de se questionner sur le monde qui nous entoure.

La mise en œuvre des recherches a été collective, en collaboration avec les autres IREM et l'INRP – devenu Ifé. Ces structures ont fourni un cadre institutionnel à nos travaux.

La base théorique est celle des recherches en didactique des mathématiques de Yves Chevallard¹, et notamment la notion de parcours d'étude et de recherche (PER).

Le groupe collège et le groupe lycée de l'IREM&S de Poitiers ont conçu des parcours qui sont une alternative possible aux traditionnels chapitres des manuels scolaires. Un parcours a pour origine une question, interne ou externe aux mathématiques, et auxquelles les notions enseignées en classe doivent contribuer à répondre.

Cela permet aux élèves, nous l'espérons, de mieux comprendre pourquoi on fait des mathématiques.

Pour bâtir ces parcours, nous avons effectué des recherches :

- *historiques* (d'où viennent les notions ? quel est le contexte de leur développement ?)
- *écologique* (dans quels domaines de la vie courante et des sciences les voit-on apparaître ?)
- *didactique* (comment les transmettre ? quelle organisation en classe de mathématiques ?)

Cette notion de parcours² s'est déclinée à l'IREM&S de Poitiers dans les directions suivantes :

- enseignement par les grandeurs pour le groupe collège : structuration du programme et des notions autour de l'étude des grandeurs usuelles : longueurs, aires, volumes, angles, durées, prix, populations. . .
- parcours sur la géométrie, l'analyse, les statistiques et probabilités pour le groupe lycée, avec des contextualisations en lien avec diverses sciences telles la démographie, l'histoire, l'astronomie, l'optique, l'acoustique. . .

¹ Voir la bibliographie page 75 où sont regroupées quelques références à des textes de Yves Chevallard.

² Voir les bibliographies pages 75 et 76 pour davantage de précisions sur la notion et des exemples de parcours

Bibliographie : textes de Yves Chevallard

Textes disponibles au format pdf sur le site <http://yves.chevallard.free.fr/>. Pour chacun, quelques paragraphes ayant guidé nos réflexions sont indiqués ci-dessous.

- [14] ***Sur l'attractivité des disciplines enseignées à l'École.***
"Quel avenir pour les mathématiques au collège et au lycée? Les mathématiques dans la cité" Chap. 1 à 5. In : *Conférences de la Famille mathématique*. IUFM d'Aix-Marseille. Mar. 2009.
- [15] ***Sur l'isolement des mathématiques dans l'enseignement secondaire.***
"Quel avenir pour l'enseignement des mathématiques?" Chap. 1,2,5. In : *Colloque L'enseignement des mathématiques du collège au premier cycle de l'université*. IUFM de Lorraine. Oct. 2003.
- [16] ***Sur l'utilité d'un programme scolaire et le rapport des citoyens au savoir.***
"Des programmes, oui. Mais pour quoi faire? Vers une réforme fondamentale de l'enseignement" Chap. 1,4. In : *Présentation devant le comité scientifique de la Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques*. IFÉ (ENS-Lyon). Jan. 2012.
- [17] ***Sur la nécessité pour le professeur de mathématiques de visiter d'autres sciences.***
"La notion de PER : problèmes et avancées" Chap. 6. IUFM de Toulouse. avril 2009.
- [18] ***Sur les moments d'études, en classe, d'une question mathématique.***
"Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique" Chap. 6. In : *Conférence dans le cadre du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique*. Baeza (Espagne). Oct. 2005.
- [19] ***Sur les notions d'activités et parcours d'étude et de recherche.***
"La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire" Chap. 6.1 à 6.5. In : *Conférence donnée à la 3^e Université d'été Animath*. Saint-Flour. août 2004.

Bibliographie : publications du groupe lycée de l'IREM de Poitiers

- [3] Dominique GAUD et Nicolas MINET. “Parcours d’étude et de recherche en géométrie pour la classe de seconde”. In : *Petit x* 79 (2009), p. 49-71.
- [6] Groupe lycée IREM DE POITIERS. *Enseigner les mathématiques en première S : trois parcours sur l’analyse et la géométrie analytique*. 2014.
- [7] Groupe lycée IREM DE POITIERS. *Enseigner les mathématiques en seconde : deux parcours sur la géométrie plane*. 2011.
- [8] Groupe lycée IREM DE POITIERS. *Enseigner les mathématiques en seconde : quatre parcours sur les statistiques et probabilités*. 2015.
- [9] Groupe lycée IREM DE POITIERS. *Enseigner les mathématiques en seconde : trois parcours sur les fonctions*. 2011.
- [10] Groupe lycée IREM DE POITIERS. *Mathématiques vivantes au lycée (fascicule 1) : algorithmique et programmation en seconde*. 2018.
- [11] Groupe lycée IREM DE POITIERS. *Mathématiques vivantes au lycée (fascicule 2) : probabilités en première : des arbres et des jeux*. 2018.

Partie D.

Pour expérimenter

Si notre démarche vous intéresse et si vous voulez l'expérimenter, nous mettons à disposition des acheteurs de la brochure certains documents sous forme numérique.

A cette fin, nous avons ouvert un espace réservé¹ sur le site de l'IREM de Poitiers. Vous y trouverez des documents figurant dans les brochures et d'autres que nous utilisons dans nos classes :

- des diaporamas ;
- des ressources TICE ;
- des énoncés des études ;
- des cours ;
- des banques d'exercices ;
- des évaluations ;
- une sitographie avec hyperliens.



Contactez le secrétariat de l'IREM de Poitiers :

Bâtiment de mathématiques H3,
SP2MI Futuroscope
Boulevard Marie et Pierre Curie TSA 61 125
86 073 POITIERS Cedex 9
Tél : (+33) 05 49 45 38 77
Mél : secrim@math.univ-poitiers.fr
Site : <http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/>

Bonne expérimentation !

¹ Appelé *Doke-brochures* et dont l'adresse est http://irem.univ-poitiers.fr/PF_brochures/dokebrochures/ et dont le code QR est ci-dessus.

Auteurs : Aubin Joséphine, Chevalarias Nathalie, Chauvin Philippe, De Ligt Frédéric, Dhé-rissard Sébastien, Gaud Dominique, Grillet Marc, Jussiaume Loïc, Jutand Olivier, Kirch Cyrille, Lebot Bertrand, Mesnier Walter, Michel Julien, Minet Nicolas.

Titre : Mathématiques vivantes au lycée
Fascicule 3 – Ondes : de *Shazam* aux étoiles

Public concerné :
Professeurs de lycée, enseignants en formation initiale, formateurs d'enseignants

Date : Janvier 2019

Mots clés : Chevallard, didactique, étude, parcours, PER, première, terminale, antenne, miroir, parabole, radiotélescope, Nançay, courbe, dérivée, équations, géométrie analytique, normale, réflexion, second degré, tangente, trigonométrie, *Shazam*, harmonique, musique, ondes, modéliser, intensité, fréquence, algorithme, signal, spectre, son, période, Fourier

Résumé : Les travaux de recherche de l'IREM&S de Poitiers s'appuient sur la notion de parcours d'étude et de recherche (PER) développée par Yves Chevallard. L'objectif est de donner du sens aux mathématiques enseignées en mettant en prise, autant que possible, les objets d'enseignement du cours de mathématiques avec des faits de société ou des questions scientifiques.

Avec cette collection *Mathématiques vivantes au lycée*, l'IREM&S de Poitiers propose des fascicules qui sont chacun constitués d'articles de deux types :

- réflexions didactiques ou pédagogiques sur un sujet mathématique particulier ;
- parcours expérimentés en lycée général ou technologique avec des énoncés pour les élèves (études, banque d'exercices, trame de cours...) et des indications pour la gestion en classe.

Ce troisième fascicule a pour objet l'étude en classe de première ou terminale de deux questions scientifiques. Le but est de montrer que les mathématiques sont irremplaçables pour la conception et la compréhension de certains objets du monde.

- *Comment fonctionne le radiotélescope de Nançay ?*

La propriété physique de convergence de rayons après réflexion sur un miroir particulier est un support original pour donner du sens à des notions mathématiques d'algèbre et de géométrie analytique rarement associées : les équations de droites, cercles et paraboles et les tangentes.

- *Comment fonctionne l'application de reconnaissance sonore Shazam ?*

Sans entrer dans le détail de l'algorithme de cette application bien connue des élèves, cet article propose de motiver l'enseignement des fonctions trigonométriques voire d'introduire le logarithme. Des grandeurs physiques issues de l'acoustique sont utiles ici.

Des ressources en ligne sont accessibles sur une plate-forme via le site de l'IREM&S de Poitiers.

IREM&S : Bâtiment de mathématiques H3,
SP2MI Futuroscope
Boulevard Marie et Pierre Curie TSA 61 125
86 073 POITIERS Cedex 9
Tél : (+33) 05 49 45 38 77
Mél : secrirem@math.univ-poitiers.fr
Site : <http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/>



ISBN : 978-2-85954-102-6
EAN : 9782859541026



9 782859 541026