Enseigner les fonctions trigonométriques pour comprendre l'application *Shazam*

Même en terminale S, où se trouve a priori le public scolaire le plus motivé par les mathématiques, les élèves posent parfois les questions suivantes : à quoi servent les notions qu'on nous présente ? Pourquoi ces définitions à apprendre, ces théorèmes (dont nombre d'entre eux sont admis), ces exercices qu'il faut préparer pour le baccalauréat ?

C'est une manière d'interroger le rôle de l'École, qui devrait avoir pour but principal l'instruction du futur citoyen et non pas exclusivement la répartition des élèves dans la société selon leur réussite aux examens. On peut également interpréter ce questionnement comme une vraie demande d'élèves curieux de savoir en quoi les mathématiques éclairent les faits du monde passé, présent ou futur et notamment ceux liés aux autres disciplines scientifiques.

Les programmes scolaires de mathématiques ne sont pas écrits dans cette optique : aucune question scientifique importante, relevant par exemple de la physique ou des sciences de la vie et de la terre n'est à l'origine de l'organisation des contenus à enseigner... Seuls quelques liens sont faits en commentaires.

Il revient donc aux professeurs de montrer que l'enseignement dispensé en classe contribue à répondre à cette interrogation légitime. Des recherches [1] sont alors nécessaires pour repenser la manière d'enseigner les notions mathématiques. C'est depuis une dizaine d'années, l'axe principal de travail des membres de l'IREM de Poitiers, tous enseignants en collège et en lycée. L'objectif est de présenter un maximum de contenus des programmes comme réponses à des questions, celles-ci aidant à structurer une progression annuelle.

Une question est à l'origine d'un Parcours d'Étude et de Recherche [2]. Les contenus qui seront enseignés durant son déroulement devront contribuer à y répondre même partiellement. Parmi les questions choisies au lycée, citons :

— Comment prendre une décision avec les probabilités dans le domaine médical ?
(en terminale S ou terminale ES)

— Comment prévoir l'évolution de la population mondiale ?
(en première S, première ES ou terminale STMG)

— Y a-t-il trop de communes en France ?
(en seconde)

Ces questions ont été sélectionnées pour permettre à la fois de parler du monde qui nous entoure, montrer que les mathématiques sont porteuses de sens, travailler en interdisciplinarité tout en traitant le programme.
Dans cet article, nous proposons d'enseigner les fonctions trigonométriques en étudiant les ondes sonores figurant au programme de physique chimie (obligatoire et spécialité).

La question que nous développons est :

Comment fonctionne une application de reconnaissance musicale sur smartphone ?

[1] http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_-_Prix_Hans_Freudenthal_2009.pdf

[2] La notion de PER est due à Yves Chevallard
http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Infrastructure_didactique_PER.pdf

I. Les programmes

Pourquoi avoir choisi un thème en lien avec la musique ? Outre le fait que la musique est un art et une science universels, source d'intérêt pour de nombreux élèves, l'étude des ondes sonores est très présente dans les programmes de physique-chimie, comme le prouvent ces extraits :

Enseignement obligatoire de physique-chimie

Ondes et particules

Notions et contenus	Compétences exigibles
Les ondes dans la matière Houle, ondes sismiques, ondes sonores. Magnitude d'un séisme sur l'échelle de Richter.	Extraire et exploiter des informations sur les manifestations des ondes mécaniques dans la matière.
Niveau d'intensité sonore.	Connaître et exploiter la relation liant le niveau d'intensité sonore à l'intensité sonore.

Caractéristiques et propriétés des ondes

Notions et contenus	Compétences exigibles
Caractéristiques des ondes Ondes progressives. Grandeurs physiques associées. Retard.	Définir une onde progressive à une dimension. Connaître et exploiter la relation entre retard, distance et vitesse de propagation (célérité). *Pratiquer une démarche expérimentale visant à étudier qualitativement et quantitativement un phénomène de propagation d'une onde.*
Ondes progressives périodiques, ondes sinusoïdales.	Définir, pour une onde progressive sinusoïdale, la période, la fréquence et la longueur d'onde. Connaître et exploiter la relation entre la période ou la fréquence, la longueur d'onde et la célérité. *Pratiquer une démarche expérimentale pour déterminer la période, la fréquence, la longueur d'onde et la célérité d'une onde progressive sinusoïdale.*
Ondes sonores et ultrasonores. Analyse spectrale. Hauteur et timbre.	*Réaliser l'analyse spectrale d'un son musical et l'exploiter pour en caractériser la hauteur et le timbre.*

Enseignement de spécialité de physique-chimie

Thème 2 : son et musique

Domaines d'étude	Mots-clés
Instruments de musique	Instruments à cordes, à vent et à percussion. Instruments électroniques. Acoustique musicale ; gammes ; harmonies. Traitement du son.
Émetteurs et récepteurs sonores	Voix ; acoustique physiologique. Microphone ; enceintes acoustiques ; casque audio. Reconnaissance vocale.
Son et architecture	Auditorium ; salle sourde. Isolation phonique ; acoustique active ; réverbération.

On trouve dans ces programmes des mots clés qui évoquent des contenus du programme de mathématiques de terminale S : ondes sinusoïdales (fonctions périodiques), analyse spectrale (somme de fonctions sinusoïdales), niveau d'intensité sonore (défini avec le logarithme décimal).

Enseignement obligatoire de mathématiques

Contenus	Capacités attendues	Commentaires
Fonctions sinus et cosinus	• Connaître la dérivée des fonctions sinus et cosinus. • Connaître quelques propriétés de ces fonctions, notamment parité et périodicité. • Connaître les représentations graphiques de ces fonctions.	On fait le lien entre le nombre dérivé de la fonction sinus en 0 et la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$. En dehors des exemples étudiés, aucun développement n'est attendu sur les notions de périodicité et de parité. On fait le lien entre les résultats obtenus en utilisant le cercle trigonométrique et les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$. ⇆ [SPC] Ondes progressives sinusoïdales, oscillateur mécanique.

Le cadre des ondes sonores nous permet d'aborder les fonctions sinusoïdales au travers du principe de la décomposition de Fourier d'une fonction périodique (suffisamment régulière). De plus, il nous semble que l'analyse spectrale étudiée en physique nécessite un traitement mathématique pour une meilleure compréhension des élèves.

De la même manière, et comme le suggère le programme de mathématiques (extrait ci-contre), nous pourrions prolonger ce travail en expliquant comment le logarithme décimal est utilisé pour définir l'échelle du niveau d'intensité ou de pression sonore, qui est une des applications des lois de psychophysique de Gustav Fechner.

> On évoque la fonction logarithme décimal pour son utilité dans les autres disciplines.
>
> ⇆ [SI] Gain lié à une fonction de transfert.
> ⇆ [SPC] Intensité sonore, magnitude d'un séisme, échelle des pH.
>
> AP *Équations fonctionnelles.*

II. Synopsis du parcours

Moment du parcours	**Contenu mathématique**	**Durée estimée**
Enquête sur le fonctionnement de l'application Shazam		30'
Étude : **1.** Vision graphique d'un signal sonore complexe et du spectre	Fonctions périodiques Définition des fonctions cosinus et sinus + courbes	2h
2. Recherche d'une fonction sinusoïdale correspondant à un son pur de fréquence donnée **3.** Construction point par point de la somme de deux sinusoïdes	Fonctions associées : $kf(x)$; $f(kx)$; $f(x+k)$; $f(x)+k$	3h
4. Recomposition du signal sonore complexe à partir du spectre sur *Geogebra*		1h
5. Retour sur le fonctionnement de *Shazam* en conclusion de l'étude		30'
Complément du cours et exercices	Fonctions sinus et cosinus : parité, dérivée, variations.	4h

III. *Shazam* : l'enquête

Le parcours démarre par une enquête que les élèves devront mener. Il s'agit de voir ce que la question évoque pour eux, et de compléter leurs connaissances par une recherche.

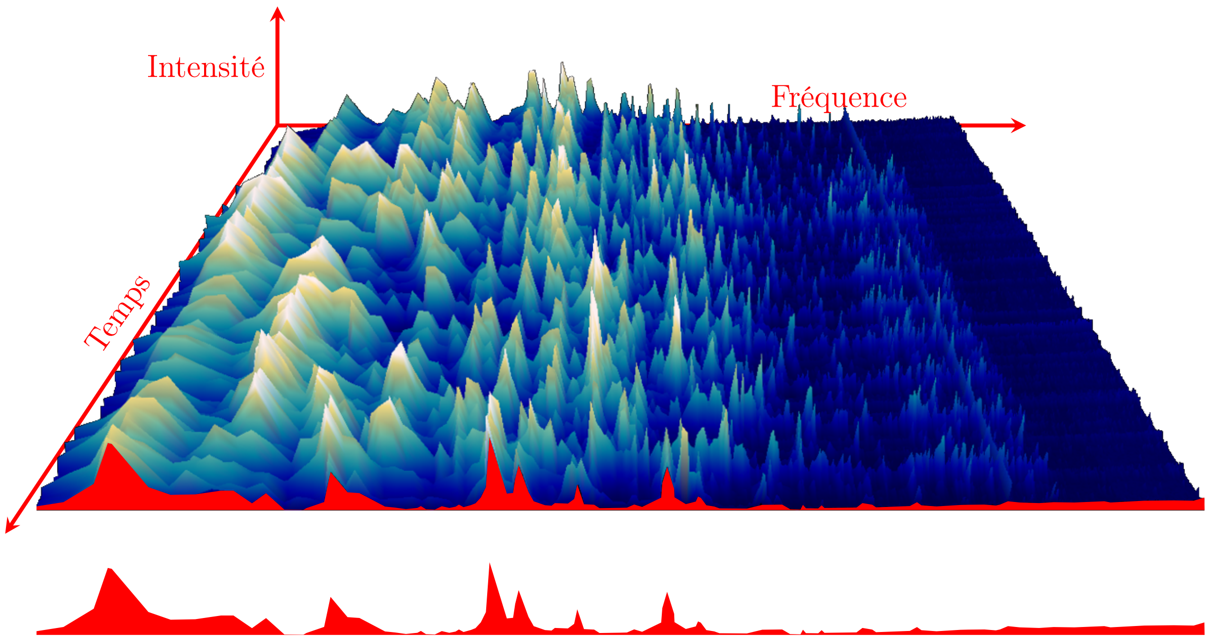
Comment fonctionne une application de reconnaissance musicale sur smartphone ?

Tous connaissent, voire utilisent, une application de reconnaissance musicale sur leur smartphone. Deux d'entre elles sont particulièrement familières aux élèves : *Sound Hound* et *Shazam*. Nous choisissons de traiter la deuxième.

Le bilan des recherches amène la classe à comprendre que c'est en comparant un extrait musical à une banque de données d'enregistrements que l'application *Shazam*, en quelques secondes, retrouve titre et interprète du morceau. [3]

Les élèves évoquent divers termes : empreinte sonore, empreinte numérique, sonagramme, spectre… Plusieurs diagrammes existent, qui nécessitent des éclaircissements. Avec un diaporama [4], le professeur montre comment la diffusion d'un extrait musical donné est traduite par un sonagramme 3D (temps, fréquence, intensité) [5]. Il peut être pertinent de rappeler aux élèves que les courbes observées sur des écrans (oscilloscope, ordinateur,…) ne sont qu'une traduction électrique d'un phénomène mécanique : les variations de pression de l'air.

[3] Voir page 12 pour en savoir plus sur le principe de fonctionnement de Shazam.
[4] Lien vers site IREM
[5] Lien vers vidéo site IREM



Ce sonagramme montre, au fur et à mesure que le temps passe, la variation d'intensité des fréquences qui composent le son. C'est d'ailleurs à partir de cette représentation que *Shazam* va identifier un morceau. La coupe (en rouge ci-dessus) est le spectre du son sur un court instant. Dans l'étude qui suit, on va expliquer le lien entre ce spectre et le signal sonore perçu.

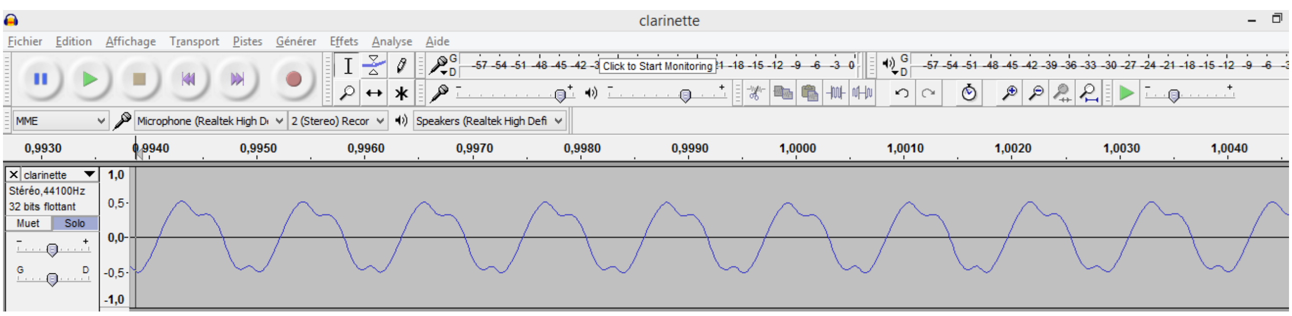
IV. *Shazam* : énoncé de l'étude

Étude – exemple de signal sonore : une note de clarinette

Suite à l'acquisition d'une note d'une clarinette sur une durée de quelques secondes, à l'aide du logiciel de synthèse sonore *Audacity* on obtient :

- une courbe représentant la pression[6] sonore en fonction du temps, par abus de langage, on appellera *signal* cette courbe ;
- un diagramme appelé *spectre*, qui représente l'ensemble des fréquences constituant ce son et les niveaux sonores correspondants.

Le but de l'étude est de comprendre le lien entre ces deux représentations graphiques et de trouver l'expression d'une fonction dont la courbe approche au mieux ce signal.

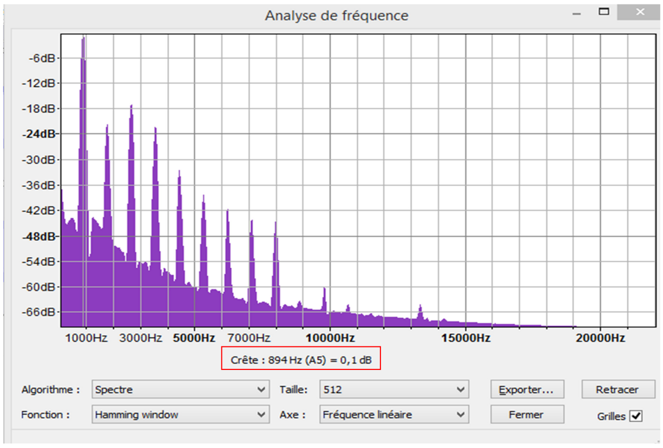


[6] *Note pour le professeur* : la relation entre intensité sonore I et pression sonore p est $I = p^2/\rho_0 c$ où c est la célérité du son et ρ_0 la masse volumique du milieu. Le niveau de pression sonore est employé par *Audacity*, donc utile dans l'étude. Le niveau d'intensité sonore, au programme de Physique, est plus communément employé.

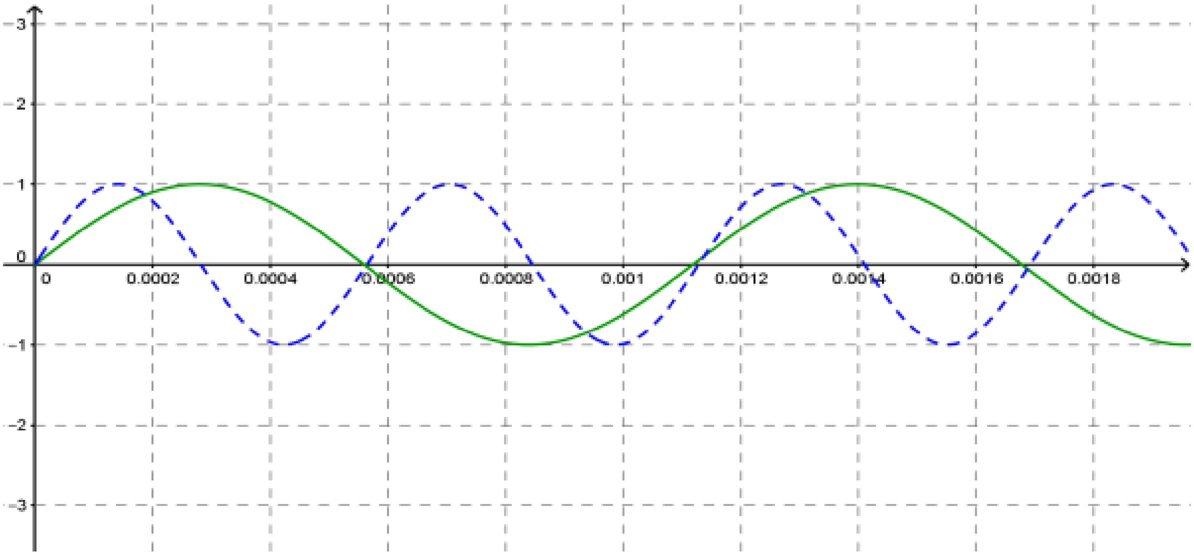
1. On lit sous le spectre l'information :

   Crête : 894 Hz

   À quoi correspond cette information sur le spectre lui-même ? Comment retrouver cette valeur sur le signal ?
2. Trouver l'expression d'une fonction qui a pour période $T = 1/894$.
   Sa courbe est-elle la même que celle du signal ?



3. On a représenté ci-dessous les signaux correspondant à deux sons purs, l'un de fréquence 894 Hz et l'autre de fréquence 1788 Hz. Attribuer à chaque courbe sa fréquence.
   Tracer point par point la courbe qui représente le signal du son complexe obtenu par superposition des deux sons purs.



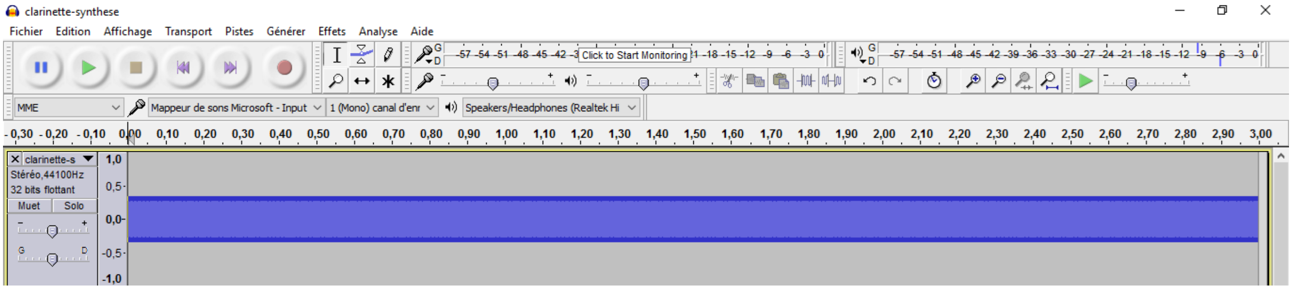
4. En vous aidant du spectre, tracer à l'aide de *Geogebra* la courbe d'une fonction qui approxime le signal correspondant au son de la clarinette.

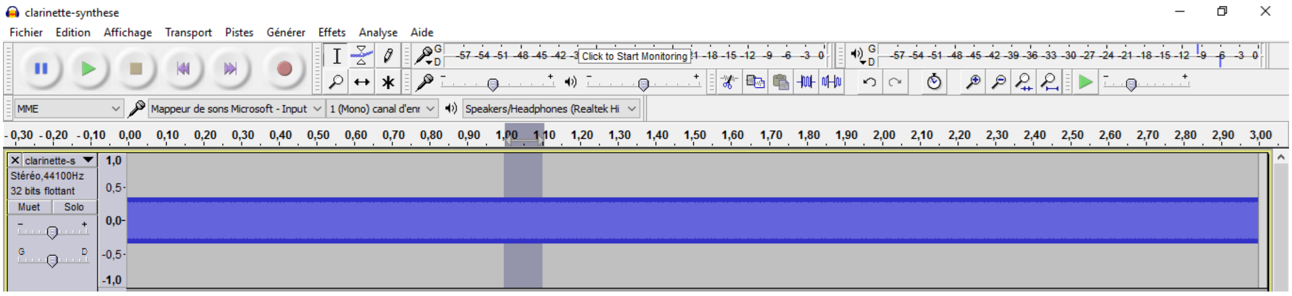
V. Shazam : gestion de l'étude

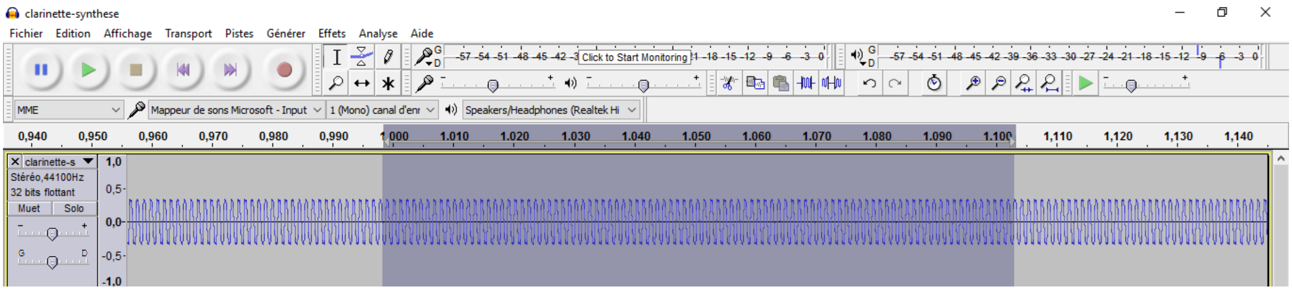
Après l'enquête et les explications partielles du fonctionnement de *Shazam*, le professeur met les élèves en activité. Il propose l'étude d'un signal sonore particulier, celui d'une note de clarinette enregistrée pendant quelques secondes ; il serait trop complexe d'étudier en entier un morceau de musique.

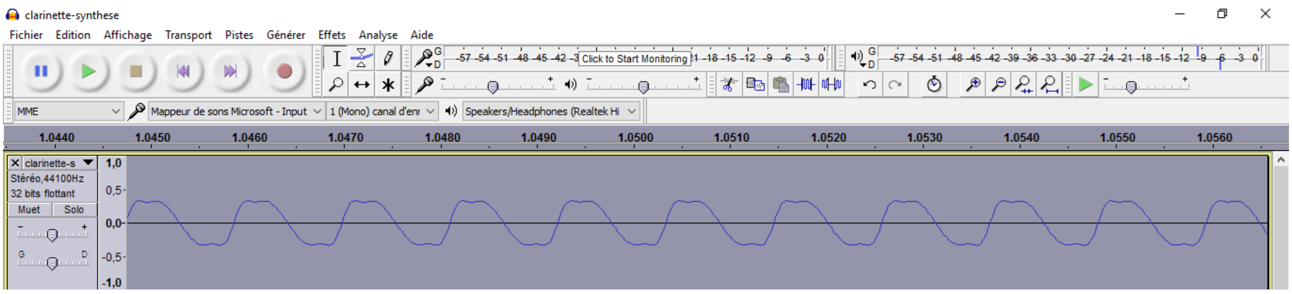
Question 1 :
À la donnée d'un signal et du spectre qui lui est associé, la classe tente d'expliquer ce que représentent ces deux graphiques et le lien qui peut exister entre eux. Les élèves ont déjà été amenés à rencontrer la courbe sur un oscilloscope dans leurs cours de physique. Sa compréhension n'est pour autant pas si simple. La capture d'écran fournie a été faite par un logiciel libre qu'ils peuvent avoir déjà rencontré : *Audacity*. Le professeur leur fait écouter ce son de

clarinette puis leur montre comment extraire la courbe donnée dans le document élèves. Pour cela, il faut sélectionner une portion du signal du fichier son [7] et zoomer suffisamment.







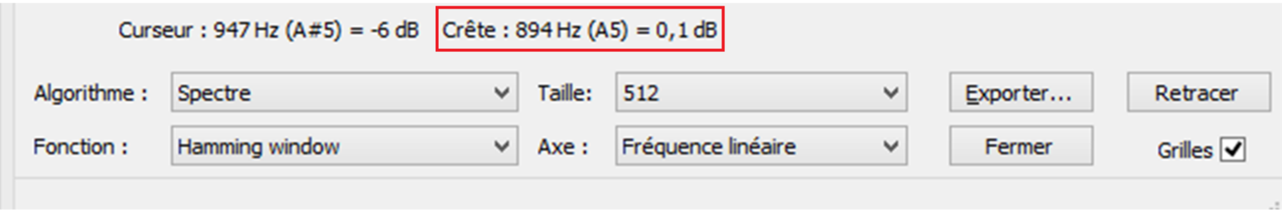


Les premières discussions permettent de mettre au clair les grandeurs représentées sur chaque axe. La propagation d'une onde sonore émise par l'instrument provoque des variations de pression de l'air. Ces variations sont perçues par l'oreille (le tympan vibre et les vibrations sont transformées en un influx nerveux transmis au cerveau) ou détectées par un microphone qui procède de manière similaire, en transformant les variations de pression de l'air en différences de potentiel électrique. Le signal obtenu est donc une courbe représentant une tension électrique en fonction du temps.
Si cette notion a déjà été travaillée en physique [8] alors les élèves savent que le spectre est théoriquement un diagramme en bâtons avec en abscisses des fréquences appelées harmoniques du son.
Dans la pratique, les logiciels fournissent des représentations graphiques où les crêtes correspondent aux harmoniques en question.

[7] Ici entre 1s et 1,1s

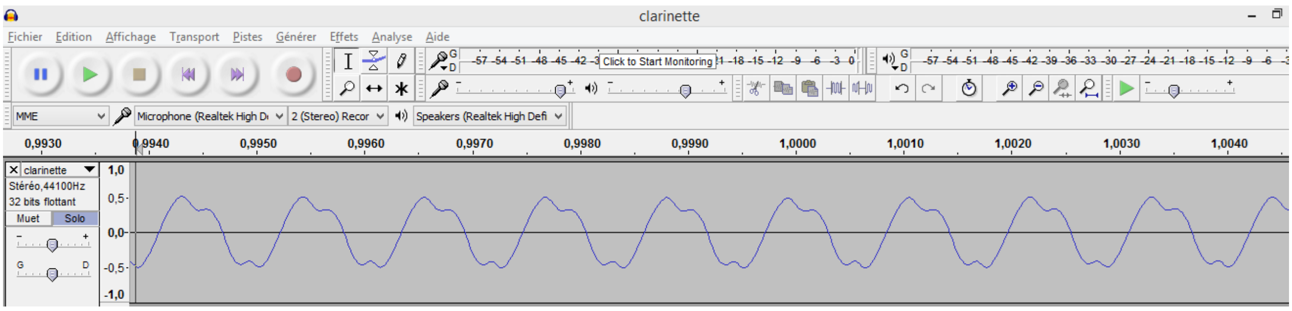
[8] Voir page 2 où sont évoqués les programmes de physique de terminale S.

Dans la première question, on demande ce que représente la grandeur 894 Hz et comment la retrouver sur le signal. On remarque que l'abscisse de la première crête du spectre est la fréquence que propose le logiciel sous le diagramme :



De plus, les abscisses des autres crêtes sont relativement proches des multiples de cette première fréquence, appelée fréquence du son *fondamental*.
Si la notion d'analyse spectrale a déjà été étudiée en physique, les élèves savent déjà que la présence d'un unique bâton correspond à un son *pur*. Ici, le son est *complexe*, et le spectre en fournit la décomposition en sons purs, nommés *harmoniques*, dont les fréquences sont des multiples de la fréquence du fondamental.

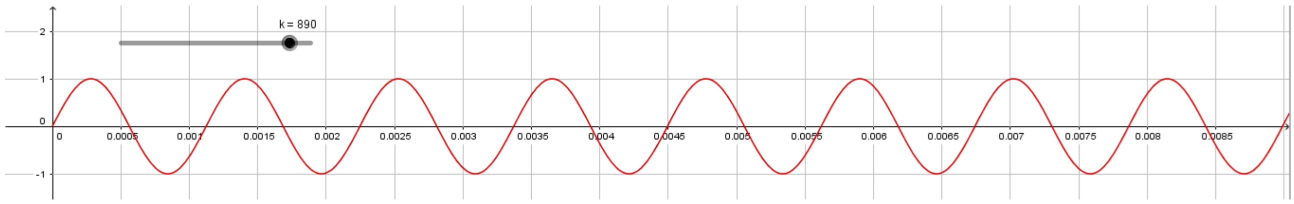
Les hauteurs des bâtons sont relatives, l'une ayant été choisie comme référence. *Audacity* utilise le niveau de pression sonore [9] en dB FS (décibels Full Scale) pour lequel l'harmonique le plus présent correspond à un niveau de 0 dB FS (les autres niveaux sont donc négatifs).
En observant le signal, les élèves remarquent une reproduction régulière d'un motif, ce qui les amène à évoquer un phénomène périodique. Connaissant la relation entre la fréquence et la période, ils peuvent à l'aide de mesures sur la courbe estimer la période puis la fréquence du signal.



La mesure de huit « périodes » donnant environ 0,009s, les élèves parlent donc d'une période de 0,001 125 seconde et d'une fréquence de 889 Hz. La mesure de huit motifs plutôt que celle d'un seul permet d'obtenir une meilleure approximation de la période. Les élèves remarquent la faible différence de leur résultat avec la fréquence donnée par le logiciel.
À la suite de cette première question, une synthèse peut être faite sur la périodicité d'une fonction, avec un rappel si nécessaire de l'enroulement de la droite réelle autour du cercle trigonométrique vu en classe de première. On peut compléter ce temps de cours avec les fonctions sinus et cosinus, au programme de terminale S, qui sont des exemples de fonctions 2π-périodiques. Quelques exercices suivent le cours, permettant de travailler la notion de périodicité.

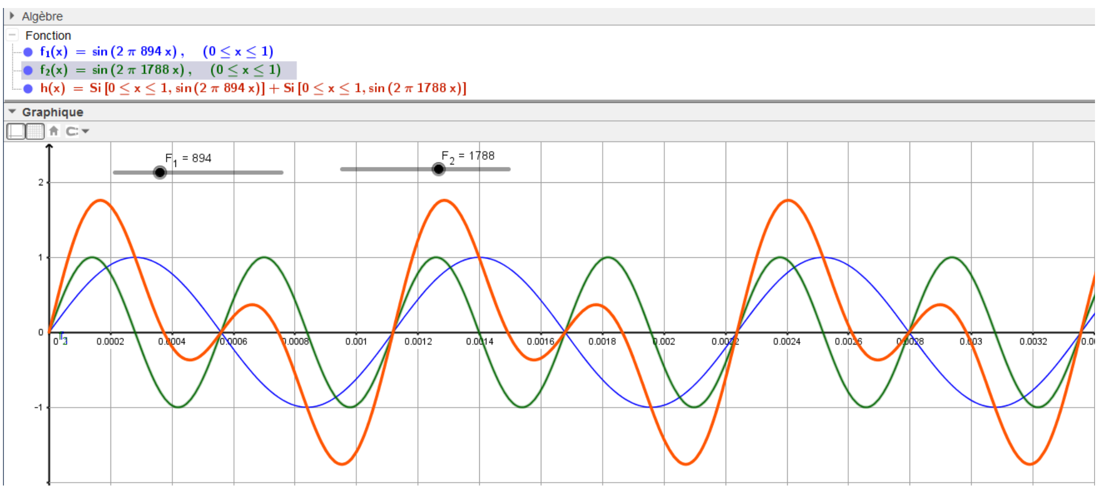
[9] La relation entre intensité sonore I et pression sonore p est $I = p^2/\rho_0 c$ où c est la célérité du son et ρ_0 la masse volumique du milieu.

Question 2 :
Cette deuxième partie de l'étude a pour but de trouver une expression de la fonction représentée par le signal. La définition de la fonction sinus ayant été donnée, les élèves pensent vite à l'utiliser mais doivent tester plusieurs expressions pour déterminer une fonction $1/894$-périodique. Leur calculatrice leur permet de faire des tests, et le professeur peut les aider en leur demandant d'abord de chercher en premier lieu une fonction 1-périodique. S'il est possible de faire cette recherche en salle informatique, alors l'utilisation d'un curseur dans *Geogebra* semble plus pratique.



Dans tous les cas, les élèves se rendent vite compte que la courbe obtenue ne ressemble pas à celle du signal. C'est alors le moment de différencier un son pur d'un son complexe : on appelle son pur un son représenté par une sinusoïde. L'objectif est désormais d'ajouter deux fonctions sinusoïdales de fréquences différentes pour créer la représentation d'un son qu'on qualifiera de complexe.

Question 3 :
La superposition de deux sons correspond mathématiquement à la somme de deux fonctions. On visualise alors la courbe obtenue en ajoutant deux fonctions sinusoïdales de fréquences respectives 894Hz (fréquence du fondamental fourni par *Audacity*) et 1 788Hz (son double, qui est théoriquement la fréquence du deuxième harmonique). Une construction point par point permet d'observer que la courbe obtenue n'est pas une sinusoïde tout en restant périodique. Le travail à la main est un peu long mais utile. On le complète par l'utilisation du logiciel *Geogebra* en montrant de manière dynamique ce qui se passe quand on ajoute deux fonctions sinusoïdales de fréquences variables.



Le professeur fait alors une synthèse sur les sommes de fonctions et les fonctions associées [10] en général.

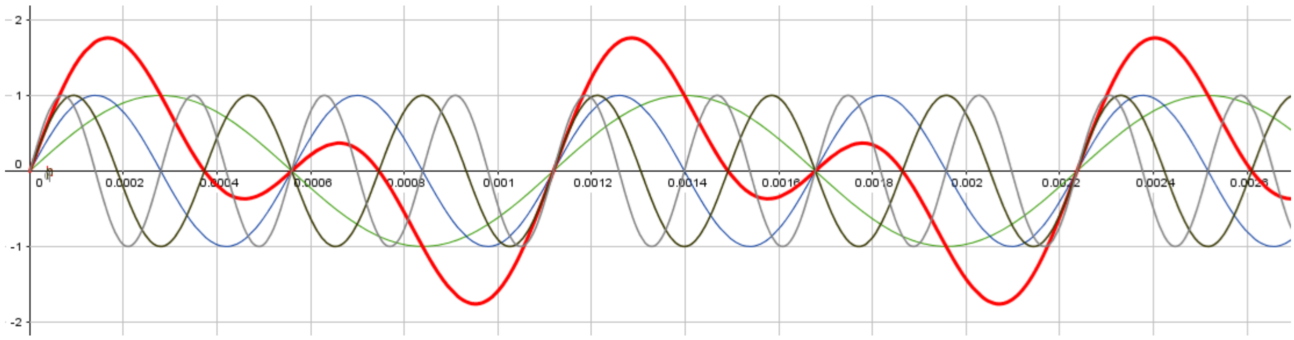
En reprenant le tracé avec *Geogebra* de la courbe représentant le signal du son complexe, superposition des deux sons purs de fréquences 894 Hz et 1788 Hz, on observe un signal dont on peut démontrer qu'il a pour fréquence 894 Hz.

[10] $g(x) = f(kx)$; $h(x) = kf(x)$ et $l(x) = f(x+k)$ avec k réel.

Question 4 :

Pour conclure cette étude, on reconstitue le son de la clarinette.

Le travail effectué à la question précédente avec *Geogebra* permet d'envisager cette reconstitution en ajoutant des fonctions sinusoïdales de fréquences multiples de la fréquence du fondamental (894 Hz, 1788 Hz, 2682 Hz, 3576 Hz...). Pour certains élèves, un premier essai consiste à ajouter des fonctions sinusoïdales affectées du coefficient 1 : ils se rendent vite compte d'un problème d'amplitude de la courbe obtenue. Ce qui amène à se poser des questions sur l'utilité des valeurs lues sur l'axe des ordonnées du spectre.



Des élèves proposent alors d'affecter à chacune des sinusoïdes le coefficient lu sur l'axe des ordonnées du spectre. Ils observent qu'ils sont négatifs. Le professeur doit alors expliquer que le logiciel *Audacity* donne des coefficients relatifs, le premier étant théoriquement égal à 0. Un essai de reconstitution du signal avec ces valeurs s'avère insatisfaisante.

L'explication doit être poursuivie : les coefficients lus sur le spectre ne sont pas ceux qu'on utilisera directement dans la formule du signal de reconstitution du son. En effet, sur le spectre fourni par *Audacity*, on lit en ordonnée le niveau de *pression sonore*, issu de la formule $N = 20\log(a/512)$ avec :

— N : niveau de pression sonore en dB FS (décibels *Full Scale*) ;
— a : pression sonore en Pascal ;
— 512 : taille de l'échantillon affiché dans la fenêtre *analyse de fréquence*.

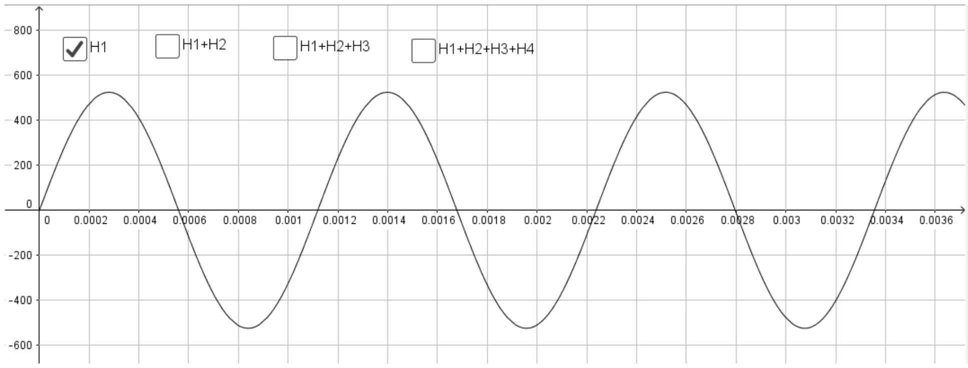
On peut signaler aux élèves la raison de l'usage du niveau sonore N à la place des mesures de pression sonore a : la disparité des ordres de grandeur des nombres a (d'un facteur 1 à 10 au moins) rend nécessaire l'utilisation d'une échelle logarithmique pour représenter le spectre.

Or pour la reconstitution du signal, les fonctions sinusoïdales doivent être respectivement affectées des valeurs de a. Il faut donc déterminer a avec la relation $a = 512 \times 10^{N/20}$. Une justification sera donnée plus tard dans l'année lors de l'étude des fonctions logarithmes. Un tableau peut être fait pour aider à retrouver les coefficients nécessaires à la reconstitution du son.

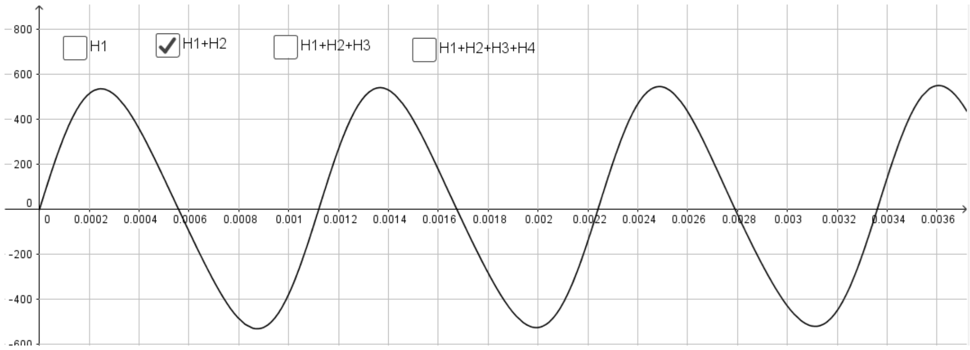
Niveau de pression sonore N (en dB FS) lu sur *Audacity*	Coefficients a_i calculés	Fréquence F_i (en Hertz) multiples du fondamental	Expression $a_i = \sin(2\pi F_i x)$ en fonction de x et des nombres a_i et F_i
0,2	523,9	894	$523,9\sin(2\pi \times 894x)$
$-19,7$	53	1 788	$53\sin(2\pi \times 1788x)$
$-16,6$	75,7	2 682	$75,7\sin(2\pi \times 2682x)$
-22	40,7	3 576	$40,7\sin(2\pi \times 3576x)$

Les élèves peuvent désormais sommer les expressions afin de reconstituer le signal.

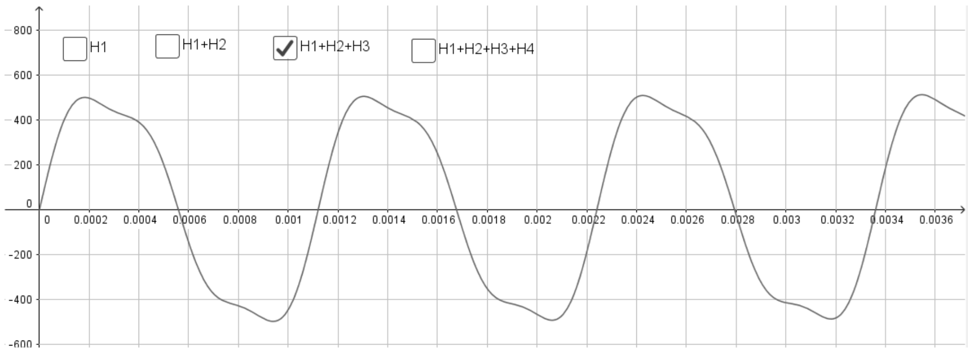
Un seul harmonique (le fondamental) donne la courbe d'équation $y = 523,9\sin(2\pi \times 894x)$:



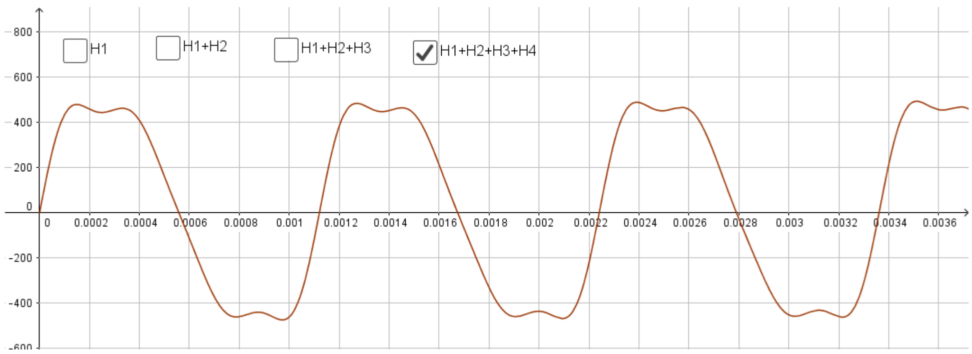
La somme de deux harmoniques donne :



La somme de trois harmoniques donne :



La somme de quatre harmoniques permet déjà de reconnaitre l'allure de la courbe du signal.



Il est possible également avec *Geogebra* d'entendre un son associé une fonction.[11]
On peut donc écouter le son obtenu avec la somme de quatre harmoniques et le comparer au son initial de la clarinette.

[11] Commande *JouerSon[<Fonction>,<Valeur Min>,<Valeur Max>]*

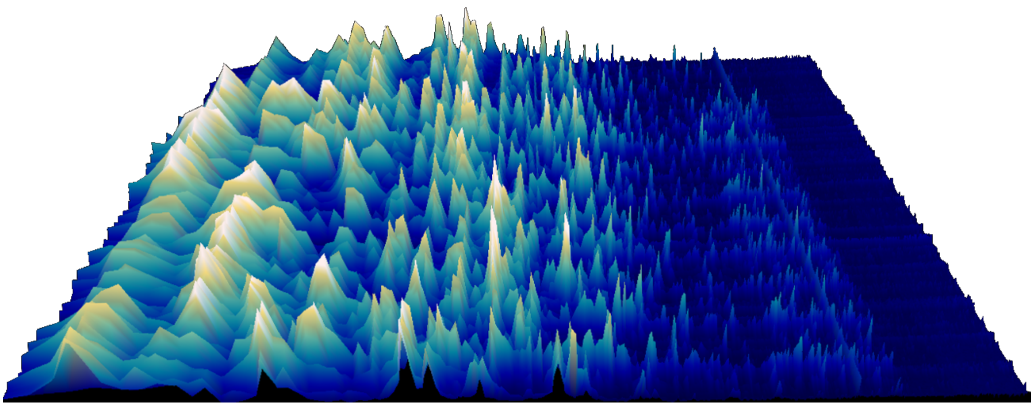
VI. Retour sur le fonctionnement de Shazam

À l'issue de cette étude, les élèves sont désormais familiarisés avec la notion de spectre. Le professeur peut, s'il le souhaite, exposer les grandes lignes du fonctionnement de *Shazam*, dont la notion de marqueur.

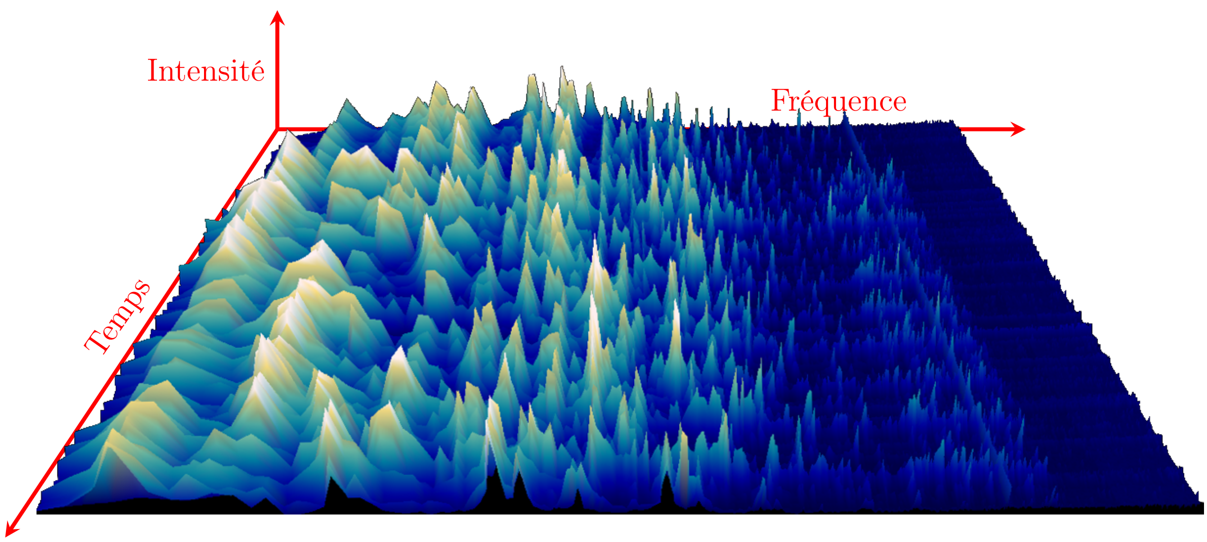
L'explication du fonctionnement de l'application Shazam qui suit est inspirée d'un article [12] de Avery Li-Chun Wang, ingénieur de Shazam.

1. Création de l'empreinte d'un morceau

Lors de l'écoute d'un son, d'un morceau, trois paramètres interviennent : le temps (moment d'écoute), la fréquence et, associé à ces deux paramètres, l'intensité. Ainsi, la connaissance de l'évolution de ces trois paramètres définit entièrement un morceau. On peut se représenter cela sous la forme d'un graphique en trois dimensions – le sonagramme – donnant l'intensité en fonction du couple (temps ; fréquence).

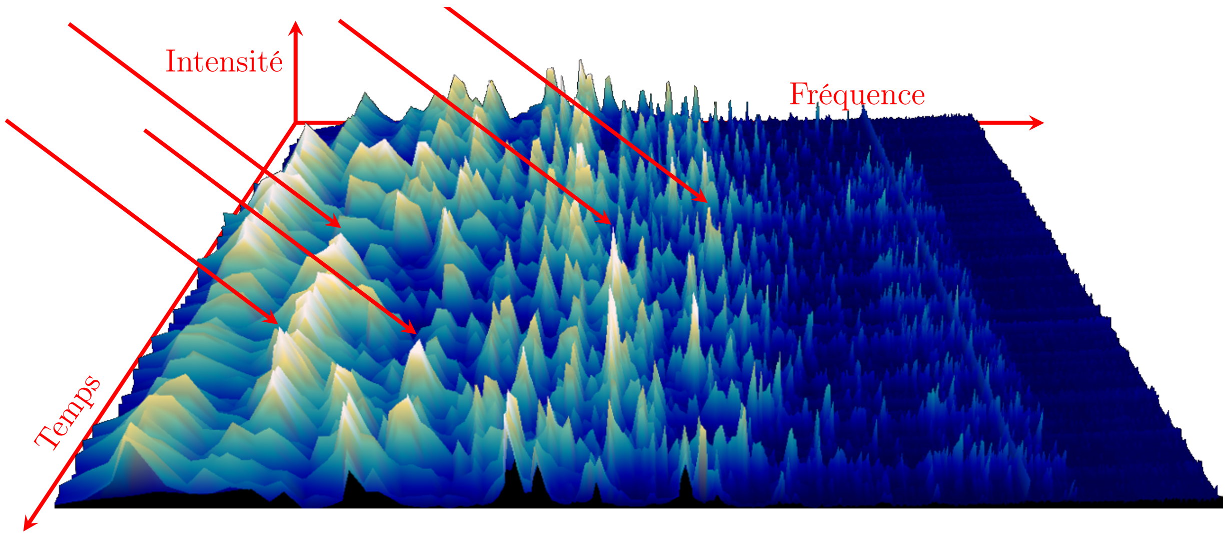


Obtenu grâce au logiciel PrettyFastFFT



[12] An Industrial-Strength Audio Search Algorithm : http:www.ee.columbia.edu/~dpwe/papers/Wang03-shazam.pdf

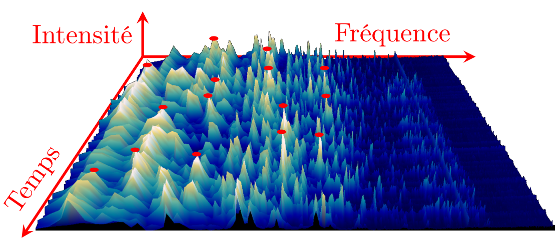
L'ensemble de ces triplets forme alors l'empreinte d'un morceau. Pour reconnaître un morceau dans une base de donnée, il faudrait être à même de comparer cette empreinte à des millions d'autres. Encore faudrait-il que l'intensité soit la même, qu'il n'y ait aucun bruit parasite... Le principe de *Shazam* est alors de simplifier cette empreinte afin d'isoler un certain nombre de marqueurs et de ne plus tenir compte de l'intensité. Ainsi, le nombre de données à collecter, à stocker et à comparer sera significativement réduit.



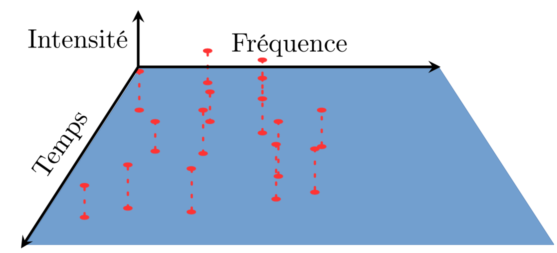
Repérage des pics significatifs

La première étape consiste à repérer les pics significatifs, c'est-à-dire les triplets (temps ; fréquence ; intensité) pour lesquels l'intensité augmente « brusquement » par rapport aux points du voisinage.

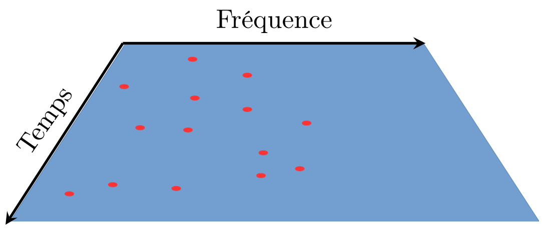
On ne conserve alors que les couples (temps ; fréquence) de ces pics. On élimine ainsi le problème lié au niveau sonore qui peut varier entre le morceau référencé et le morceau écouté.



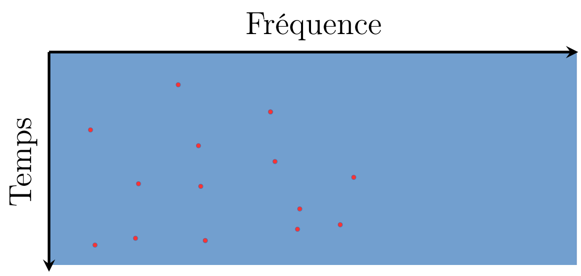
Repérage des pics significatifs



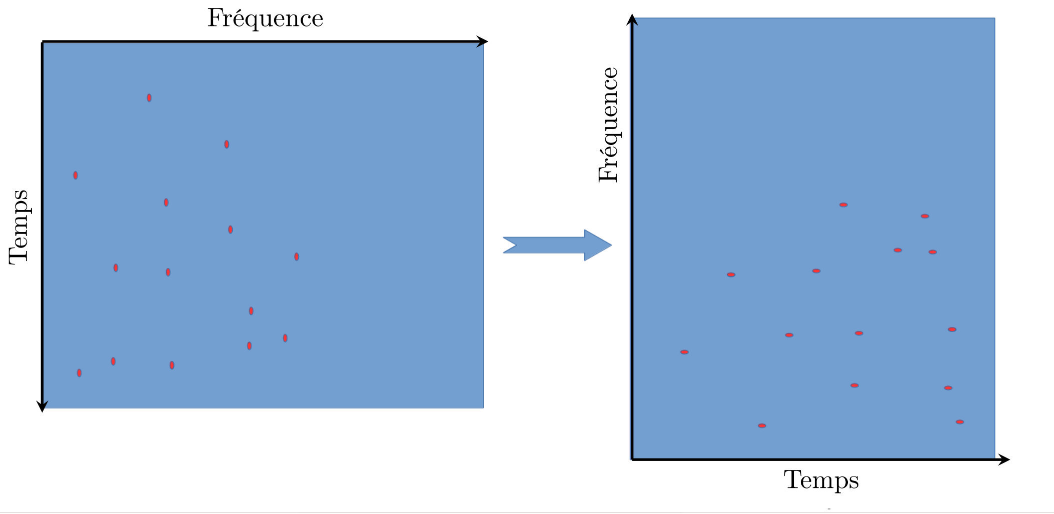
Repérage des pics significatifs



Élimination de l'intensité



Élimination de l'intensité



Le morceau est alors réduit à une série de couples (temps ; fréquence) [13].

2. Comparaison entre morceaux

On a maintenant un algorithme permettant de déterminer une empreinte simplifié d'un morceau écouté et une base de données comportant les empreintes de millions de morceaux extraites par ce même algorithme.

Il reste à mettre en correspondance le morceau écouté et le morceau référencé sachant que l'écoute ou la recherche ne commence pas dès le début du morceau. Afin de gérer cette différence temporelle, *Shazam* associe des couples de marqueurs (par exemple $(t_1\ ;\ f_1)$ et $(t_2\ ;\ f_2)$) pour former un triplet $(f_1\ ;\ f_2\ ;\ t_2 - t_1)$ en créant ainsi de nouveaux marqueurs éliminant le problème de l'instant d'écoute absolu.

La comparaison se fait alors statistiquement de la façon suivante.

Le premier graphique ci-dessous fait apparaître tous les marqueurs communs au morceau écouté et à un morceau de la base de données.

- En abscisse, l'instant auquel apparaît le marqueur sur le morceau de la base de données.
- En ordonnée, l'instant auquel apparaît le marqueur sur le morceau écouté.

Le deuxième graphique représente un diagramme en bâtons recensant la différence « ordonnée moins abscisse ».

Si on retrouve une classe modale dont l'effectif « tranche » avec les autres classes, alors on peut en déduire que les deux morceaux correspondent. On peut de plus déterminer le début d'écoute du morceau (ici la quarante et unième seconde).

[13] Une telle représentation se retrouve sur les sonagrammes colorés par lignes de niveaux.

Nuage de points des correspondances des marqueurs

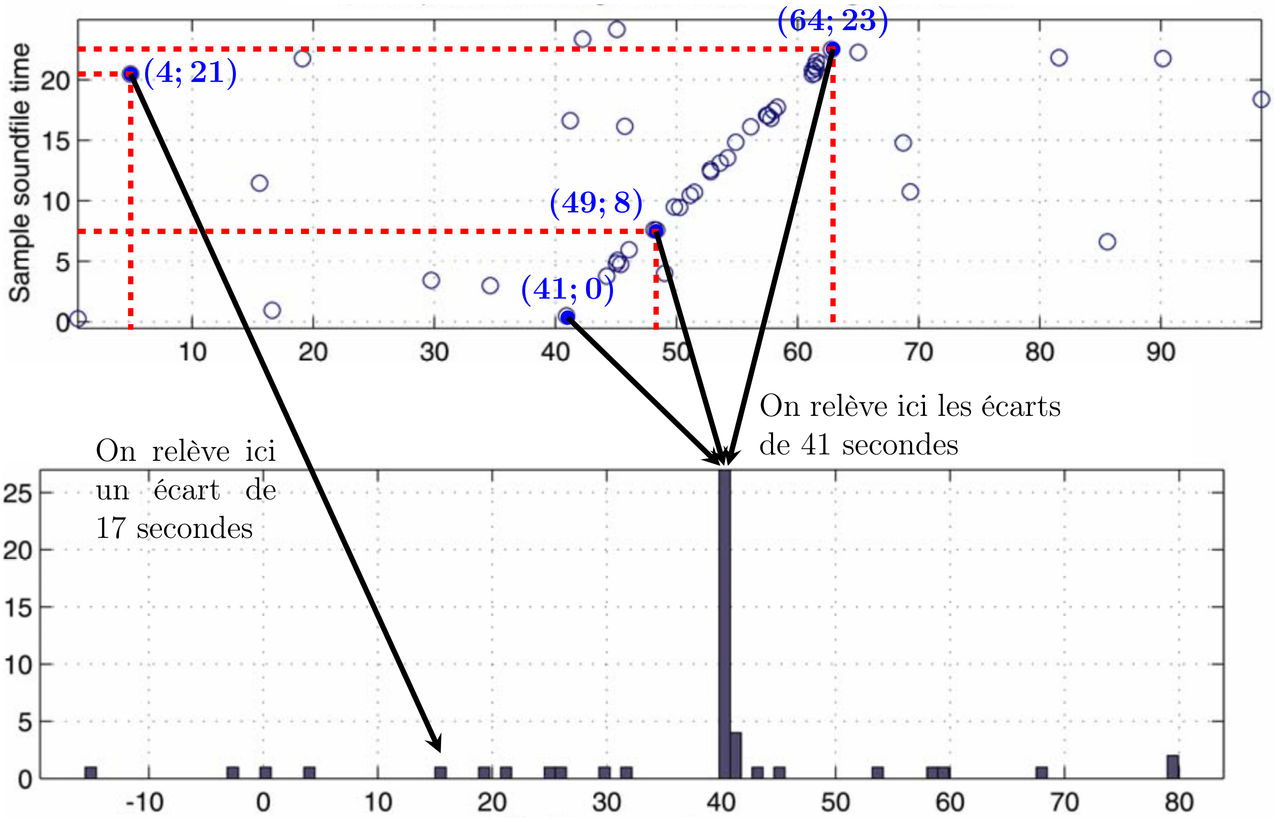


Diagramme en bâtons des décalages temporels des marqueurs entre l'extrait et la base de données

VII. Conclusion

Un travail plus technique et purement mathématique termine ce parcours. Les élèves sont amenés à faire l'étude complète d'une fonction trigonométrique (parité, périodicité, dérivée, équations trigonométriques, variations. . .).

En sus des classiques exercices nécessaires à l'acquisition des techniques figurant dans tous les manuels, nous proposons quatre situations variées [14] (dont un bref descriptif est donné sur la page suivante) où une modélisation par les fonctions trigonométriques s'avère pertinente.

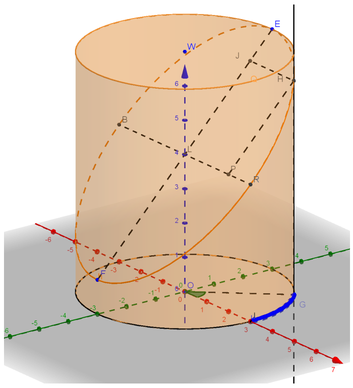
Tout ce travail aura nécessité deux semaines en classe et aura permis aux élèves de comprendre l'utilité des fonctions trigonométriques et de faire des liens avec le cours de physique. Nous espérons développer chez ces élèves des compétences d'engagement dans une activité de recherche. La diversité (non exhaustive !) des exercices proposés met en évidence l'importance des phénomènes périodiques et, au-delà, illustre selon la célèbre formule du physicien Eugène Wigner la *déraisonnable efficacité des mathématiques*.

[14] Les énoncés complets sont accessibles sur la page du site :
http://irem.univ-poitiers.fr/portail/index.php?option=com_content&view=article&id=152&catid=32&Itemid=60

VIII. Annexe

1. Tapis magique au Futuroscope

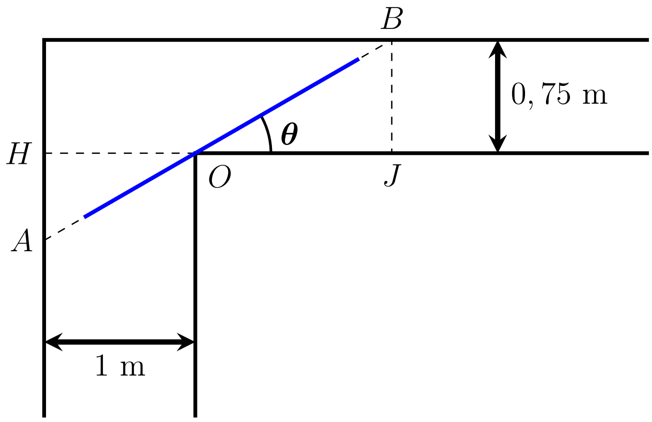
Au Futuroscope, une des attractions est le tapis magique. Le bâtiment est entouré de tuyaux qui sont des cylindres creux en PVC coupés en biais en leur sommet par une section plane.



On se propose de rechercher le patron d'un tel tuyau ainsi que la section du sommet.

2. Plaque de verre dans un couloir

La figure ci-dessous représente un couloir (vu d'en haut) dans lequel on veut faire passer une plaque de verre rigide (d'épaisseur négligeable) de $2,5$ mètres de long (représentée en bleu sur la figure).



On se propose de déterminer s'il est possible de négocier le virage sans détériorer les murs ? Et si oui, d'obtenir la longueur maximale de la plaque de verre pouvant franchir le virage ?

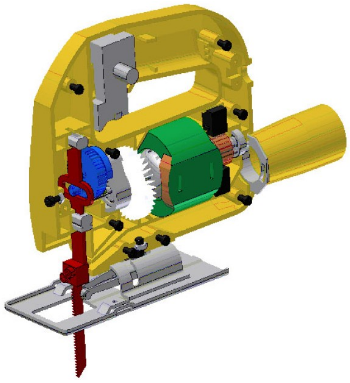
3. Fonctionnement d'une scie sauteuse

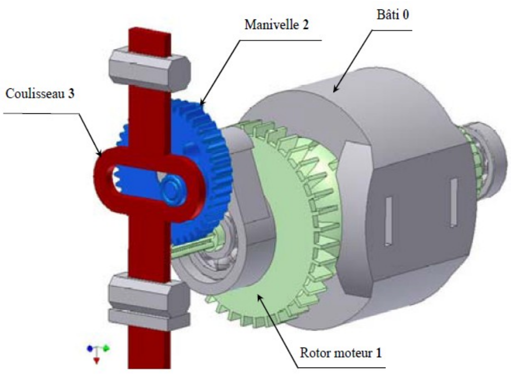
Exercice inspiré du document ressource de 1reSTI2D

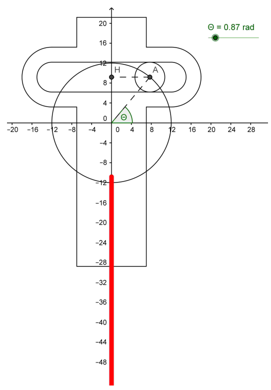
Lorsque une scie sauteuse est en marche, elle fait tourner une manivelle (numérotée 2 sur le schéma) qui transmet un mouvement de va-et-vient à la lame de la scie.

Une molette de réglage de la scie permet de faire varier la vitesse de rotation de la manivelle 2.

Lorsque la vitesse de coupe dépasse 1,5 m.s^{-1}, la découpe de plastique dur tel que le plexiglas devient impossible car il y a un échauffement trop important du matériau et donc un risque de fonte de celui-ci.





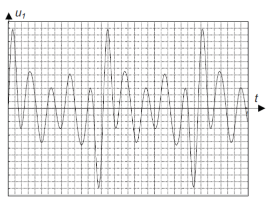


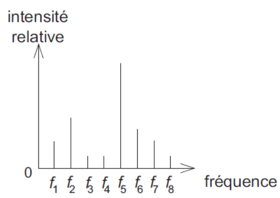
On se propose de déterminer, pour la scie sauteuse choisie, la fréquence de rotation afin que la vitesse maximale de coupe n'excède pas 1,5 m.s^{-1}.

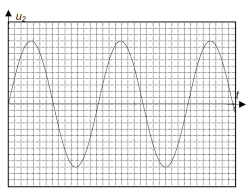
4. Les violons

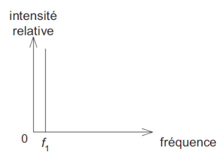
Reprise et complément du sujet de Baccalauréat scientifique de Physique spécialité Métropole 2011

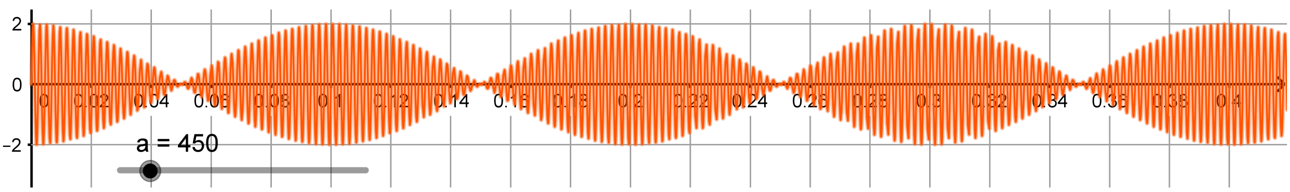
Avant de débuter un concert, les instrumentistes doivent accorder leurs instruments. Le chef d'orchestre dispose de repères techniques simples mais efficaces pour vérifier la justesse des sons émis par l'orchestre.











On propose d'étudier le phénomène de battement apparaissant lors de l'accord des instruments ainsi que le niveau sonore produit par plusieurs instruments (faisant intervenir le logarithme).