DIOPHANTE (vers 250 après J.-C.)

Au début du Livre I de son traité ***Les Arithmétiques***, Diophante établit une nomenclature et des abréviations pour les puissances d'un nombre et leurs inverses. Cette nomenclature sera reprise par les mathématiciens jusqu'au 17ème siècle, en particulier par les Allemands de l'école Cossiste et par Viète.

• **Extrait de *l'introduction des Arithmétiques,*** traduction P Ver Eecke, Blanchard, Paris 1959.

«Sachant, mon très honoré Dionysius, que tu es zélé pour apprendre à trouver des problèmes sur les nombres, j'ai entrepris d'exposer la nature et la puissance des nombres, en commençant par les bases sur lesquelles les choses sont établies.

Il se peut que la matière paraisse plus difficile qu'elle ne l'est, parce qu'elle n'est pas encore connue, et que les débutants désespèrent de réussir. Elle te deviendra cependant facile à comprendre, grâce à ton zèle et à ma démonstration ; car l'ambition jointe à l'enseignement mène rapidement à la science.

Comme tu sais, entre autres choses, que tous les nombres sont formés d'une certaine quantité d'unités, il est clair que leur établissement s'étend à l'infini. Parmi les nombres, on rencontre notamment : les carrés qui sont formés au moyen d'un nombre multiplié par lui-même, nombre qui est appelé le côté du carré ; d'autre part les cubes, qui sont formés au moyen des carrés multipliés par leurs côtés ; ensuite les bicarrés, qui sont formés au moyen de carrés multipliés par eux-mêmes ; puis encore les carré-cubes qui sont formés au moyen des carrés multipliés par les cubes ayant même côté que ces carrés ; enfin, les cubocubes qui sont formés au moyen de cubes multipliés par eux-mêmes. Or, il se fait que la combinaison de beaucoup de problèmes arithmétiques résulte soit de la somme de ces nombres, soit de leur différence, soit de leur multiplication, soit du rapport qu'ils ont entre eux, ou qu'ils possèdent respectivement avec leurs propres racines ; et ces problèmes seront résolus si tu suis la voie qui sera indiquée ci-après.

Il a été convenu que chacun de ces nombres, après avoir reçu une désignation abrégée, constitue un élément de la théorie arithmétique. Ainsi on appelle puissance le carré, et sa marque distinctive est un Δ ayant comme indice Y ; c'est-à-dire que la puissance est Δ^{Y}. On appelle cube [ce qui résulte de la multiplication du carré par sa propre racine], et sa marque distinctive est un K ayant comme indice Y ; c'est-à-dire que le cube est K^{Y}. On appelle bicarré ce qui résulte du carré multiplié par lui-même, et sa marque distinctive est deux deltas ayant comme indice Y ; c'est-à-dire que le bicarré est $\Delta\Delta^{Y}$. On appelle carré-cube ce qui résulte du carré multiplié par le cube ayant même racine que le carré, et sa marque distinctive est ΔK ayant comme indice Y ; c'est-à-dire que le carré-cube est ΔK^{Y}. On appelle cubocube ce qui résulte du cube multiplié par lui-même, et sa marque distinctive est deux kappas ayant comme indice Y ; c'est-à-dire que le cubocube est $K^{}K^{Y}$. Enfin, le nombre qui ne possède aucune des particularités précédentes, mais qui possède en soi une quantité indéterminée d'unités, s'appelle l'arithme, et sa marque distinctive est ς. Il y a encore une autre marque distinctive pour l'invariant des nombres déterminés, c'est-à-dire pour l'unité, et cette marque est M ayant comme indice $^{\circ}$, ou $\overset{\circ}{M}$.

De même que les parties aliquotes des nombres sont dénommées d'une manière correspondante à ces nombres, tel le tiers correspondant à trois, et le quart correspondant à quatre, nous dénommerons aussi les parties aliquotes des nombres renseignés plus haut d'une manière correspondante à ces nombres. Ainsi, pour l'arithme nous dirons l'inverse de l'arithme ; pour sa puissance, nous dirons l'inverse du carré ; pour son cube, nous dirons l'inverse du cube ; pour son bicarré, nous dirons l'inverse du bicarré ; pour son carré-cube, nous dirons l'inverse du carré-cube et pour le cubocube, nous dirons l'inverse du cubocube. Chacune de ces parties aliquotes possédera, au-dessus de la lettre du nombre adéquat, le délinéament Á qui caractérise son espèce.»

• Références

– *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones de Diophante d'Alexandrie*, traduction de Paul Ver Eecke, Blanchard, 1959.

– *Diophante. Les arithmétiques*, texte arabe et traduction française de Roshdi Rashed, Les Belles Lettres, 1984.

• Document : Livre I, problème 27. Adaptation de la traduction de P. Ver Eecke.

Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés.

Il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres ; chose qui est d'ailleurs figurative.

Proposons que la somme des nombres soit $\overset{\circ}{M}\,\overline{\kappa}$ (20 unités), et que leur produit soit $\overset{\circ}{M}\,\text{ϙ}\overline{\varsigma}$. (96 unités)

Que la différence des nombres soit $\varsigma\,\overline{\beta}$ (2x). Dès lors, puisque la somme des nombres est $\overset{\circ}{M}\,\overline{\kappa}$ (20) si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou $\overset{\circ}{M}\,\overline{\iota}$ (10). Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de la différence des nombres, c'est-à-dire $\varsigma\,\overline{\alpha}$ (1x), il s'établit de nouveau que la somme des nombres est $\overset{\circ}{M}\,\overline{\kappa}$ (20), et que leur différence est $\varsigma\,\overline{\beta}$ (2x). En conséquence, posons que le plus grand nombre est $\varsigma\,\overline{\alpha}\;\overset{\circ}{M}\,\overline{\iota}$ (1x + 10) donc le plus petit sera $\overset{\circ}{M}\,\overline{\iota}\pitchfork\varsigma\,\overline{\alpha}$ (10 – 1x), et il s'établit que la somme des nombres est $\overset{\circ}{M}\,\overline{\kappa}$ (20), et que leur différence est $\varsigma\,\overline{\beta}$ (2x). Il faut aussi que le produit des nombres fasse $\overset{\circ}{M}\,\overline{\text{ϙ}\varsigma}$ (96). Or le produit est $\overset{\circ}{M}\,\overline{\rho}\pitchfork\Delta^{Y}\overline{\alpha}$ (100 – 1x^2), ce que nous égalons à $\overset{\circ}{M}\,\overline{\text{ϙ}\varsigma}$ (96), et ς devient $\overset{\circ}{M}\,\overline{\beta}$ (2).

En conséquence, le plus grand nombre sera $\overset{\circ}{M}\,\overline{\iota\beta}$ (12), le plus petit sera $\overset{\circ}{M}\,\overline{\eta}$ (8) et ces nombres satisfont à la proposition.

VIÈTE (1540-1603)

En 1591, Viète publie ***L'introduction à l'Art analytique ou Algèbre nouvelle.*** Cette nouvelle algèbre est une "Logistica speciosa" c'est-à-dire un calcul sur des ***symboles*** (*species*), en opposition à la "Logistica numerosa" qui est un calcul sur les nombres.

• Extraits

«Mais la forme sous laquelle on doit aborder la Recherche exige les ressources d'un art spécial, qui exerce sa logique non sur des nombres, suivant l'erreur des analystes anciens, mais au moyen d'une Logistique nouvelle, beaucoup plus heureuse que la Logistique numérale, et qui sert mieux que celle-ci à comparer les grandeurs entre elles, en proposant premièrement la loi des homogènes, et en établissant ensuite, comme on fait, la célèbre série ou échelle des grandeurs, qui montent ou descendent proportionnellement par leur propre puissance d'un genre à l'autre, au moyen de laquelle soient désignés et distingués leurs degrés et leurs genres dans les comparaisons.» (Chapitre 1)

«Logistique numérale est celle qui est exposée par des nombres. Logistique spécieuse est celle qui est exposée par des signes ou des figures <au sens de symboles>, par exemple, par des lettres de l'alphabet.» (Chapitre 2)

• La méthode

1) Écrire avec des lettres les relations entre grandeurs :

– les grandeurs cherchées avec la lettre A ou toute autre voyelle E, I, O, U, Y

– les grandeurs données avec les lettres B, C, D ou d'autres consonnes

2) Respecter la loi des homogènes, c'est-à-dire la dimension des grandeurs :

– dimension 2 : A carré, B plan

– dimension 3 : D cube, F solide

– …

On retrouve la nomenclature de Diophante :

De la loi des homogènes et des degrés et des genres des grandeurs comparées. Chapitre 3 …**3.** Des grandeurs scalaires la première est : Côté ou Racine. 2. Carré. 3. Cube. 4. Carré-carré. 5. Carré-cube. 6. Cube-cube. 7. Carré-carré-cube. 8. Carré-cube-cube. 9. Cube-cube-cube. Et ainsi avec la même série et méthode doivent être dénommées toutes les autres.	**4.** Les genres des grandeurs comparées dans l'ordre avec lequel on énonce les scalaires sont : 1. Longueur ou largeur. 2. Plan. 3. Solide. 4. Plano-plan. 5. Plano-solide. 6. Solido-solide. 7. Plano-plano-solide. 8. Plano-solido-solide. 9. Solido-solido-solide. Et ainsi avec la même série et méthode doivent être dénommées toutes les autres.

• **Références**

– La nouvelle Algèbre de M. Viète, Vaulézard, Fayard, 1986. (Contient la traduction française de 1630 de Vaulézard de l'Introduction à l'Art analytique et des 5 livres des Zététiques).

– Site web :

http://www.district-parthenay.fr/parthenay/creparth/GUICHARDJp/VIETEaccueill.html

• **Documents**

Zététiques **(1591), Livre I, problème 4 :** Étant donné les différences de deux nombres à un troisième et le rapport de ces différences, trouver le troisième nombre.

ZETETICVM IIII.

Datis duobus lateribus defficientibus à iuſto, vnà cum ratione defectuum inuenire latus iuſtum.

Sint data duo latera deficientia à iuſto. primum B. ſecundum D. data quoque ratio defectus primi ad defectum ſecundi vt R ad S. Oportet inuenire latus iuſtum.

Defectus primi eſto A. Ergo B + A erit latus iuſtum. Quoniam autem eſt vt R ad S ita A ad $\frac{S \text{ in } A}{R}$ igitur $\frac{S \text{ in } A}{R}$ erit defectus ſecundi, quare D + $\frac{S \text{ in } A}{R}$ erit quoque latus iuſtum, & ideo D + $\frac{S \text{ in } A}{R}$ æquabitur B + A.

Omnia in R. Ergo D in R, + S in A æquabitur B in R, + A in R.

Et æqualitate ordinata D in R, ══ B in R æquabitur R in A, ══ S in A.

Vnde erit R, ══ S ad R ita D, ad A ══ B.

Vel, defectus ſecundi eſto E. Ergo D + E erit latus iuſtum. Quoniam autem vt S ad R ita E ad $\frac{R \text{ in } E}{S}$ Igitur $\frac{R \text{ in } E}{S}$ erit defectus primi. Quare B + $\frac{R \text{ in } E}{S}$ erit quoque latus iuſtum, & ideo æquabitur D + E. Omnia in S.

Ergo B in S, + R in E æquabitur D in G, + S in E.

Et æqualitata ordinatâ D in S, ══ B in S æquabitur R in E, ══ S in E.

Vnde erit vt R ══ S ad S, ita D ad E ══ B.

Datis igitur duobus lateribus deficientibus à iuſto vnà cum ratione defectuum inuenitur latus iuſtum. Enimuero eſt

Vt differentia ſimilium defectuum ad ſimilem defectum lateris primi vel ſecundi, ita differentia laterum deficientium vera (quæ & defectuum) ad defectum verum lateris primi vel ſecundi. Quo defectu congruenter reſtituto fit latus iuſtum.

Si B 76 D 4 R 1 S 4 A fit 24 E 96.

Remarques. Les données : B et D les différences, R/S leur rapport. L'inconnue : A, la différence entre le troisième nombre et B. Le signe ══ (voir épisode 1).

***Traité des Équations* (1615), Livre II, chapitre 1, problème 2 :** Résolution de $x^2 - ax = b$.

II.

Si A quadratum — B in A bis. } æquetur Z plano.

A — B esto E. igitur E quadratum, æquabitur { Z plano + B quadrato.

Consectarium.

Itaque, l. { Z plani. + B quadrato. } + B, fit A, de qua primum quærebatur.

Sit B 1. Z planum 20. A 1 N.

1 Q — 2 N. *æquabitur* 20. *& fit* 1 N *l.* 21 + 1.

Remarques

Si A^2-2AB=Zp, et A-B=E, alors E^2=Zp+B^2, c'est pourquoi $\sqrt{Zp + B^2}$ +B=A, ce que nous cherchions.

Soit B=1, Zp=20, A=1N. 1Q-2N=20, et N vaut $\sqrt{21}$+1.

***Traité des Équations* (1615), Livre II, chapitre 12 :** Relation entre les racines et les coefficients d'une équation du troisième degré.

PROPOSTIO. II.

Si A cubus
— { B, D, G } in A quad.
+ { B in D, B in G, D in G } in A.
} æquetur B in D in G.

A explicabilis est de qualibet illarum trium B, D, vel G.

1 C. — 6 Q. + 11 N. *æquatur* 6.

Fit 1 N. 1. 2. *vel* 3.

Remarques

Si A^3 - (B+D+G) A^2 + (BD+BG+DG) A = BDG, alors A est égal à B, D ou G.

Application numérique : si $1x^3 - 6x^2 + 11x = 6$ alors 1x vaut 1, 2, ou 3.

***Zététiques* (1591), Livre IV, problème 4 :** Trouver deux triangles rectangles semblables ayant les hypoténuses données, de sorte que la base d'un troisième triangle déduit de ceux-ci composée de la perpendiculaire du premier et de la base du second soit donnée.

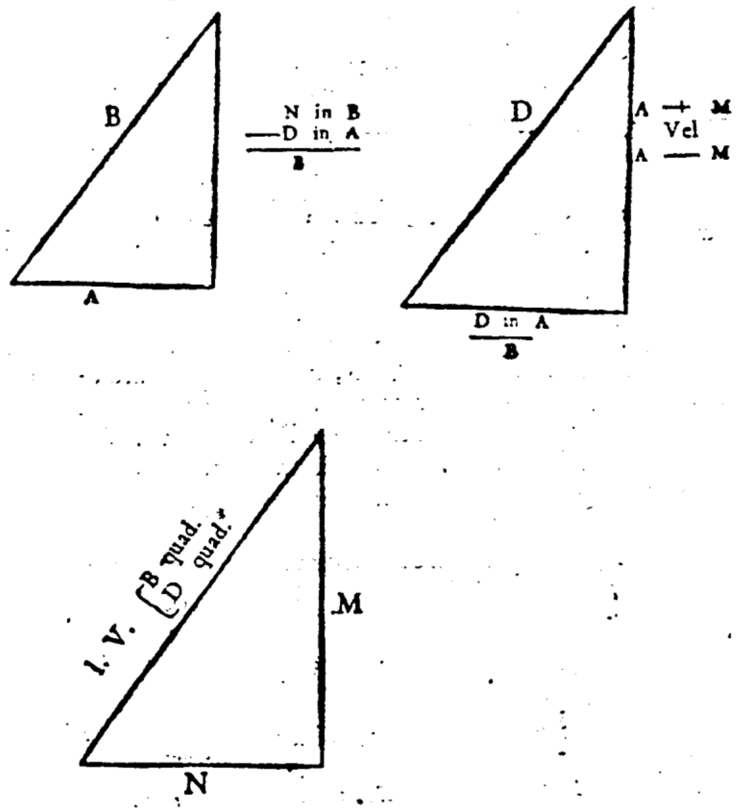
Il faut en plus que la base donnée dépasse l'hypoténuse du premier.

ZETETICVM IIII.

Inuenire duo triangula rectangula ſimilia datas habentes hypotenuſas, & didučti ab iis tertij trianguli baſis compoſita ex perpendiculo primi & baſe ſecundi erit ea quæ præfinitur.

Oportebit autem baſim illam præfinitam præſtare hypotenuſæ primi.

Sit trianguli primi datâ B hypotenuſa, ſecundi primo ſimilis, D. Oportet ab iis diducere tertium triangulum, cuius baſis æquetur N, compoſita ex perpendiculo primi & baſe ſecundi. B quadratum + D quadratum — N quadrato æquetur M quadrato. Ergo diducti triãguli perpendiculum erit M. Sit autem A baſis primi. Igitur baſis ſimilis ſecundi erit $\frac{D \text{ in } A}{B}$. Perpendiculum ideo primi N — $\frac{D \text{ in } A}{B}$. Perpendiculum verò ſecundi erit A + M, vel A — M vt ſit M differentia inter baſim primi & perpendiculum ſecundi. Sit ſanè primo caſu A + M erit igitur vt B ad D ita $\left\{\frac{N \text{ in } B - D \text{ in } A}{B}\right\}$ ad A + M. Quo analogiſmo reſoluto & omnibus benè ordinatis, fit $\left\{\frac{D \text{ in } N \text{ in } B - B \text{ in } M \text{ in } B}{B \text{ quadrato} + D \text{ quad.}}\right\}$ æquale A. Seu reuocatâ ad analogiſmum æqualitate eſt vt B quadratum, + D quadrato ad D in N, — B in M, ita B ad A.



Secundo verò caſu, ſit perpendiculum ſecundi A — M. Erit igitur vt B ad D ita $\left\{\frac{N \text{ in } B - D \text{ in } A}{B}\right\}$ ad A — M. Quo analogiſmo reſoluto, & omnibus ritè peractis fit $\left\{\frac{D \text{ in } N \text{ in } B + B \text{ in } M \text{ in } B}{B \text{ quadrato} + D \text{ quadrato}}\right\}$ æquale A ſeu reuocatâ ad analogiſmum æqualitate, eſt vt B quadratum + D quadrato ad D in N, + B in M, ita B ad A.

Duo igitur quæſita triangula ita ſe habent.