



Qu'est-ce que nos principes naturels, sinon nos principes accoutumés ?

La puissance de la coutume (PASCAL)

DEUX QUESTIONS POUR L'ARTISAN...

Contrainte "pratique" : combien de notes ?

Combien de tuyaux ? De cases ? De trous ?



Contraintes "esthétiques" : quelles notes ?

Comment déterminer : longueurs des tuyaux, largeurs de cases, distance entre les trous ?

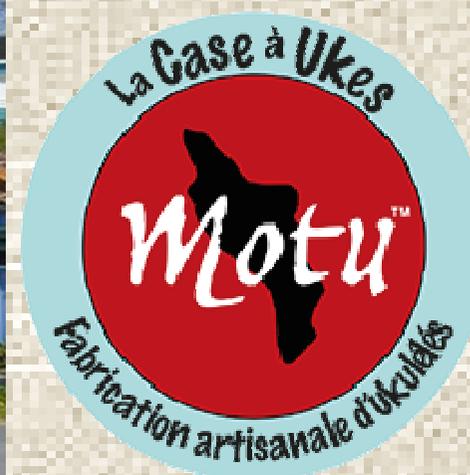
LA REPONSE D'UN ARTISAN FABRICANT DE UKULELES A L'ILE D'OLERON

Calculer l'emplacement de l'octave est assez simple, mais trouver l'emplacement des autres notes nécessite des calculs plus savants. Les luthiers utilisent une équation appelée la règle des 18, c'est en fait celle des 17,817.... On calcule la position d'une frette à partir de la précédente.

<http://www.tontonremy.com/ukulele/instrument/page3/page3.html>

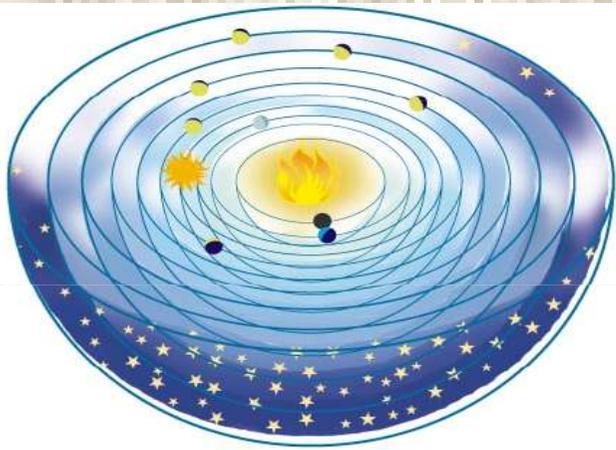


IREM POITIERS mai 2019

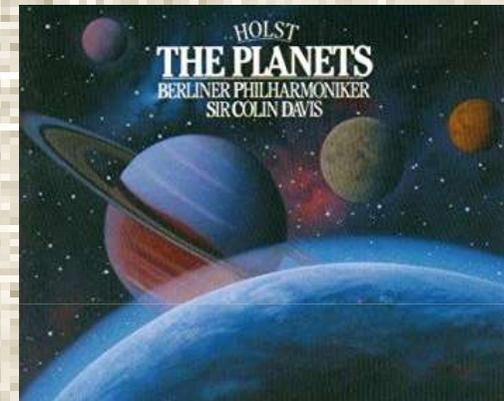


SCIENCE, ART ESTHETIQUE, ART MORAL, SCIENCE...

« Par la raison divine, toutes choses furent établies dans *l'harmonie des nombres* »
BOÈCE (480 - 524) « *De Institutione Musica* »



L'harmonie des sphères,
une description du
monde ...

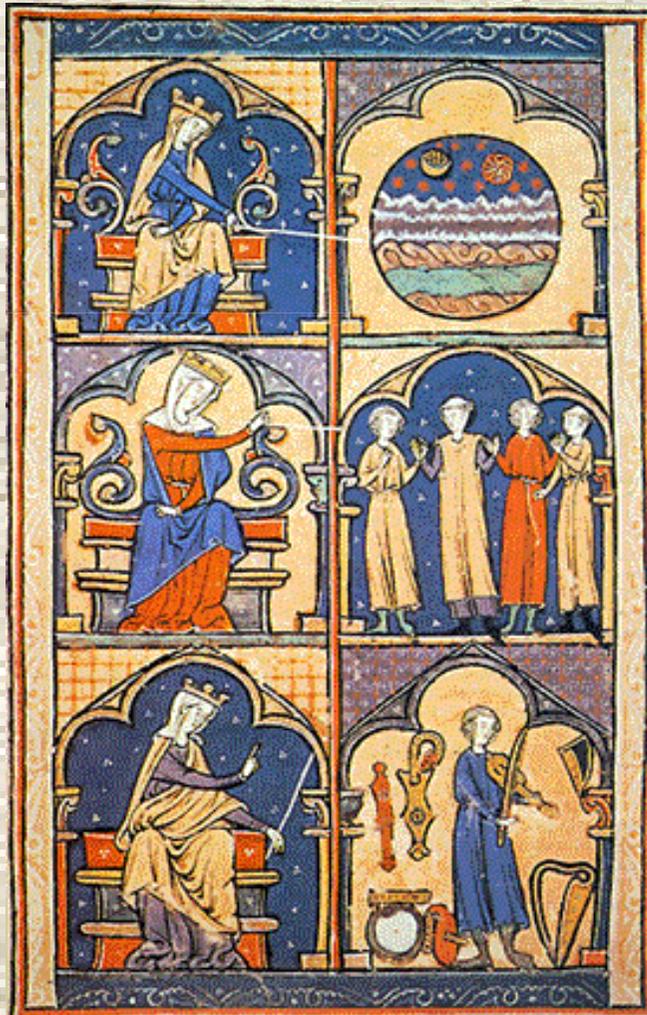


Art majeur de l'Antiquité
grecque, la musique est
portée par la voix et les
instruments, et forme
des esprits vertueux.



SCIENCE, ART ESTHETIQUE, ART MORAL, SCIENCE...

« Par la raison **divine**, toutes choses furent établies dans **l'harmonie des nombres** »
BOÈCE (480 - 524) « *De Institutione Musica* »

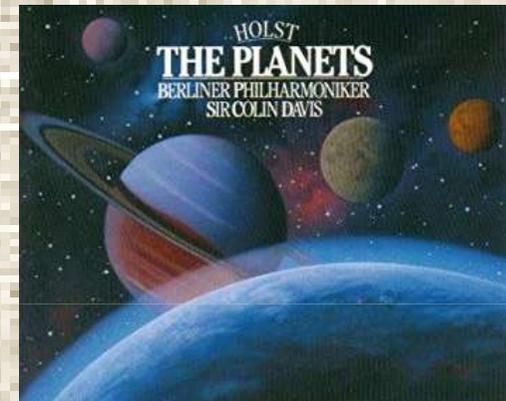


L'harmonie des sphères,
une description de la
volonté **divine**...

... rendant rationnels les
actes et les mouvements
des Hommes, au service
de la foi ...

... harmonie prolongée
et imitée sur Terre par la
voix et les instruments.

IREM POITIERS mai 2019



SCIENCE, ART ESTHETIQUE, ART MORAL, SCIENCE...

« Par la raison **divine**, toutes choses furent établies dans **l'harmonie des nombres** »

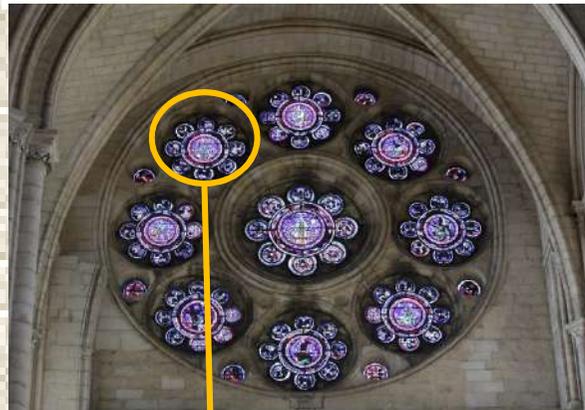
BOÈCE (480 - 524) « *De Institutione Musica* »

La mathématique, qu'en latin nous pouvons appeler philosophie doctrinale, est la science qui considère la quantité abstraite. En effet est dite abstraite la quantité au moyen de laquelle l'entendement laisse de côté la matière ou les autres accidents, par exemple le pair et l'impair ou d'autres concepts de ce genre que nous faisons intervenir seulement dans le raisonnement. Elle se divise ainsi ; division de la mathématique en :

{ Arithmétique
Musique
Géométrie
Astronomie.

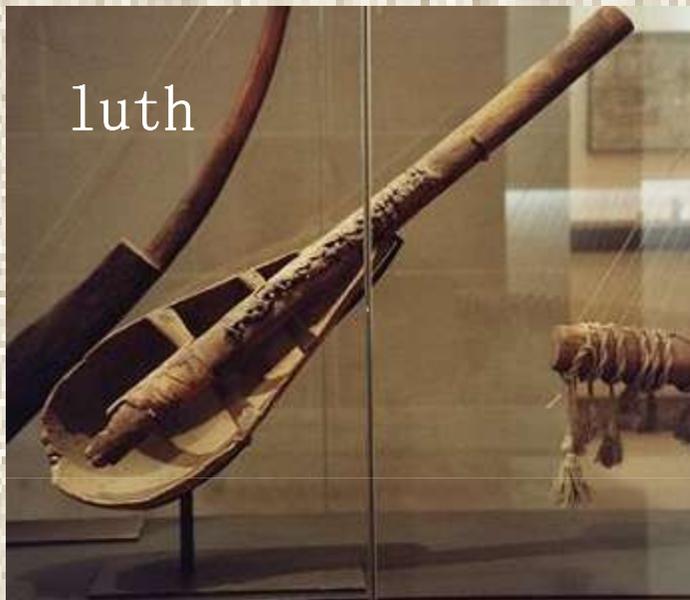
(Cassiodore, *Des arts et des sciences relevant des études libérales*, chap. 3)

A partir du III^e s., le **quadrivium** est le chemin vers la philosophie et à la théologie.



QUELQUES INSTRUMENTS GRECS

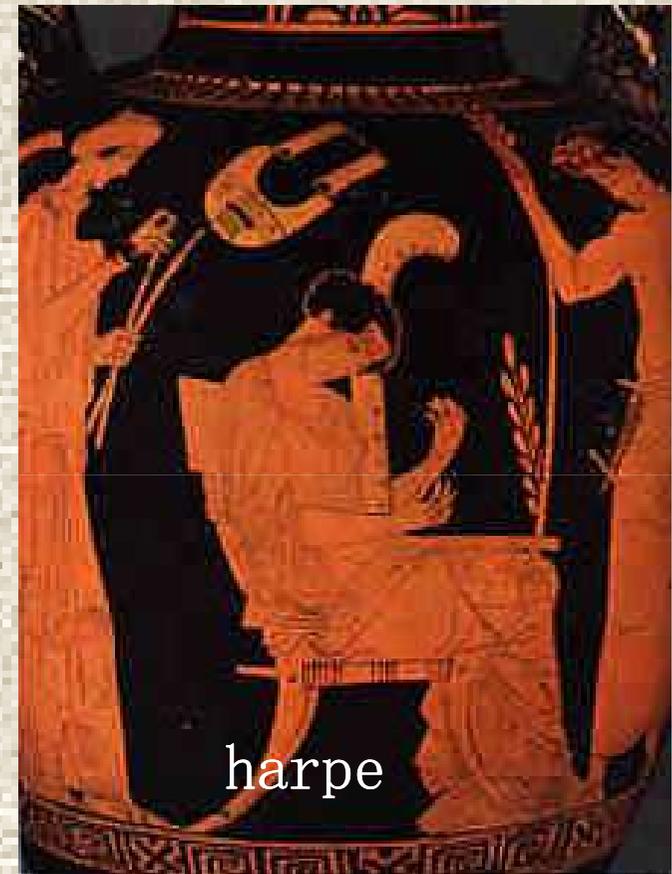
luth



lyre

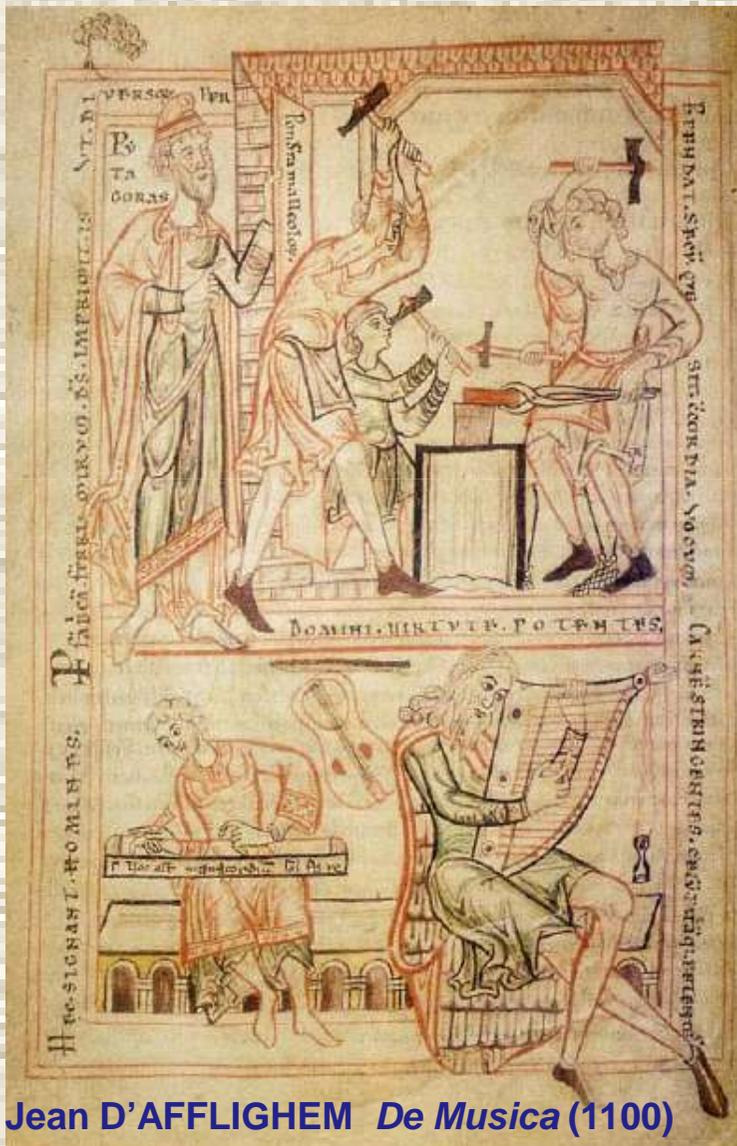


harpe

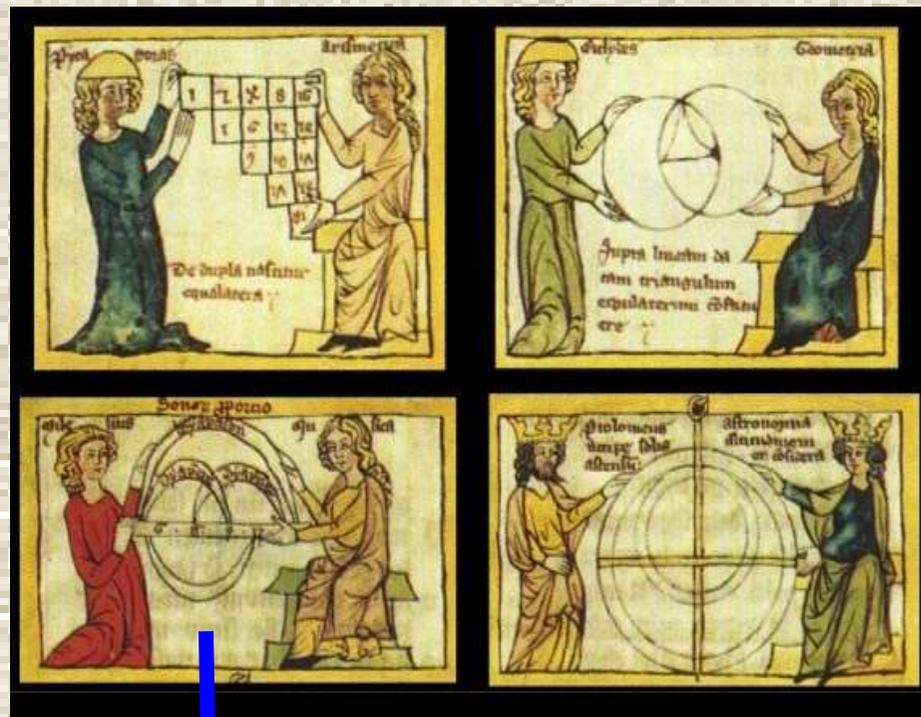


syrinx

LE MONOCORDE



Jean D'AFFLIGHEM *De Musica* (1100)



LA REVELATION DE LA FORGE



« Pythagore cherchait avec une ardeur soutenue de quelle manière il apprendrait **les constantes des accords...** Par quelque volonté divine, passant devant un atelier de forgeron, il entendit que les marteaux résonnaient sous le choc, tirant des sons une sorte d'accord...

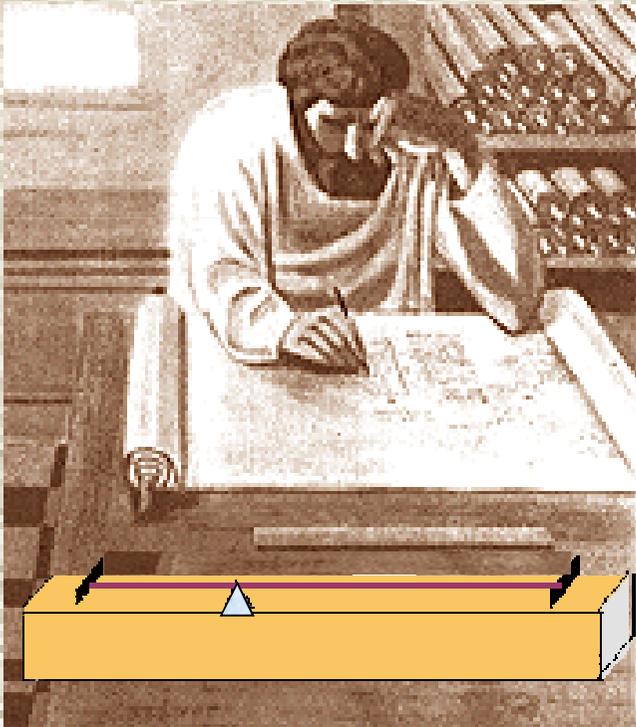
Étonné de trouver là ce qu'il cherchait depuis longtemps, il examina les poids des cinq marteaux, et trouva ...

Anicius Mancius Severinus Boetius **BOECE**
« *L'institution musicale* » (vers 510)



LA REVELATION DE LA FORGE (bis)

... que ceux qui répondaient à l'accord de diapason avaient un poids double de l'autre. Deux des trois autres pesés entre eux ou avec l'un des deux premiers furent trouvés dans un **rapport de poids de $4/3$, $3/2$ ou $9/8$** .



De retour chez lui, Pythagore examina si la **raison des accords** consistait toujours de la même façon... Ainsi découvrit-il **la règle** permettant d'obtenir un examen sûr et solide, au point de ne tromper par un jugement douteux aucun chercheur."

BOECE « L'institution musicale » (vers 510)

EXPERIENCE SONORE

Noter les positions du chevalet qui donnent un son "harmonieux" avec le son de la corde à vide...



LA REVELATION DE LA FORGE (ter)

Boèce insiste sur l'idée novatrice de Pythagore qui a recours à l'expérience pour en déduire un fait général.



« ... Tantôt adoptant à des cordes des longueurs double et moitié et réalisant d'autres proportions en jugeant à l'oreille, tantôt frappant des coupes de poids différents avec une baguette d'airain et de fer, il se réjouit de n'avoir rien trouvé d'opposé à ses conclusions. »

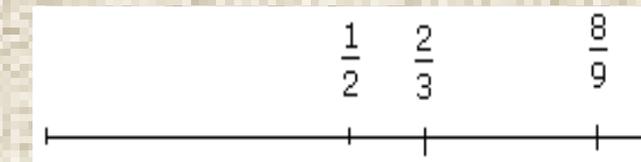
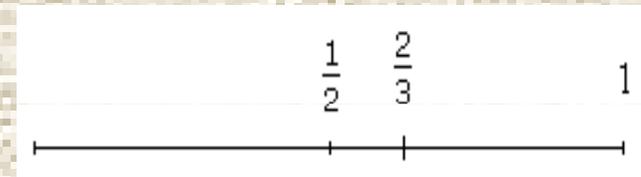
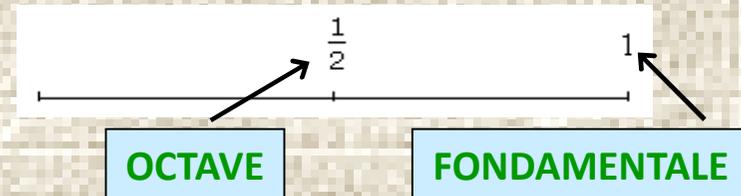
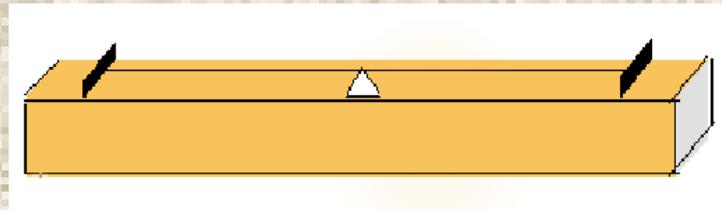
LA GAMME DE PYTHAGORE (PRINCIPE)

On part d'une note (**longueur totale**)
et de cette même note « à l'octave »
(**longueur moitié**)

Pour des raisons d'harmonie, on retient la
note obtenue avec une longueur égale aux
deux tiers de la longueur totale

On recommence avec désormais
"les deux tiers des deux tiers" ...

... Qu'on corrige en $\frac{8}{9}$ pour rester dans
le même intervalle !

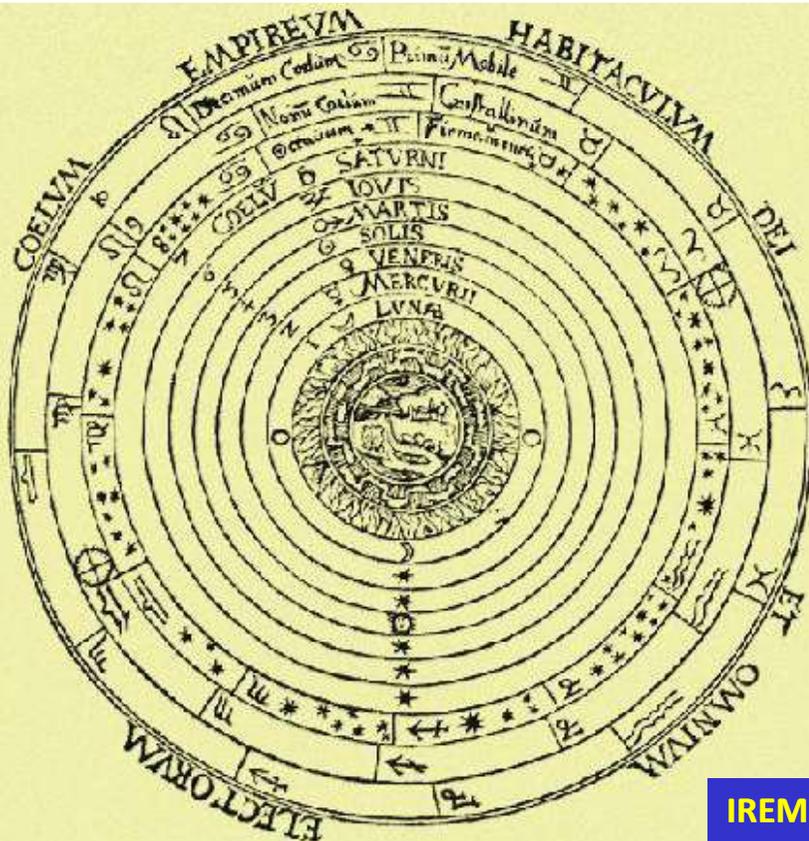


Et ainsi de suite...

LA GAMME DE PYTHAGORE : COMMENT TERMINER ?

1 — $\frac{2}{3}$ — $\frac{8}{9}$ — $\frac{16}{27}$ — $\frac{64}{81}$ — $\frac{128}{243}$ — $\frac{512}{729}$ — $\frac{2048}{2187}$ — $\frac{4096}{6561}$ — $\frac{16384}{19683}$ — $\frac{32768}{59049}$ — $\frac{131072}{177147}$ — $\frac{524288}{531441}$

« Pythagore affirmait que l'Univers chante et qu'il est construit selon les lois de l'Harmonie. Il fut le premier à ramener les mouvements des sept corps célestes au rythme et à l'harmonie musicale. » HIPPOLYTE (- 440)



- L'harmonie des sphères offre une explication de la gamme : **7 corps célestes, 7 notes, donc !**
- Le cycle des quintes offre une explication de **l'ordre des jours de la semaine**

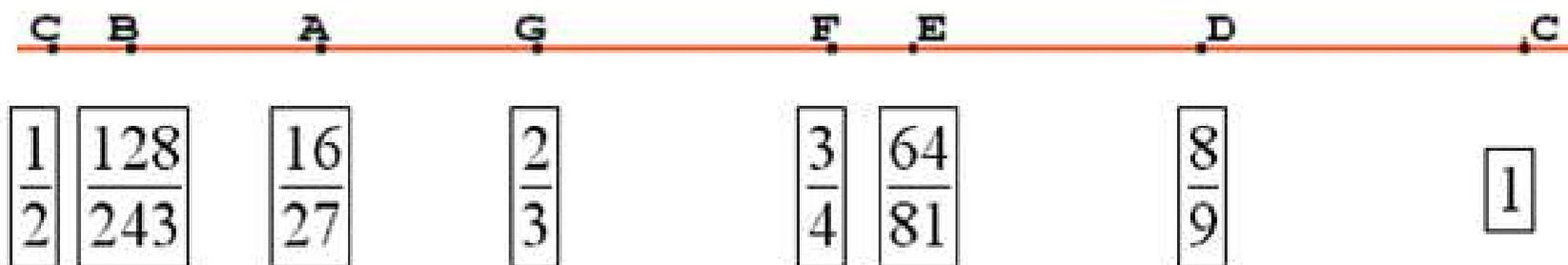
LE CYCLE DES QUINTES



$$1 \rightarrow \frac{2}{3} \rightarrow \frac{8}{9} \rightarrow \frac{16}{27} \rightarrow \frac{64}{81} \rightarrow \frac{128}{243} \rightarrow \frac{512}{729} \rightarrow \frac{2048}{2187}$$

- Le rapport 2048/2187 est remplacé par 1 (ou 1/2), ce qui permet de proposer une fin au cycle avec huit notes.
- Le rapport 512/729 est remplacé par 3/4, à la fois plus simple et plus harmonieux.

Voici donc les rapports de la « gamme de Pythagore »



LA SPIRALE DES QUINTES

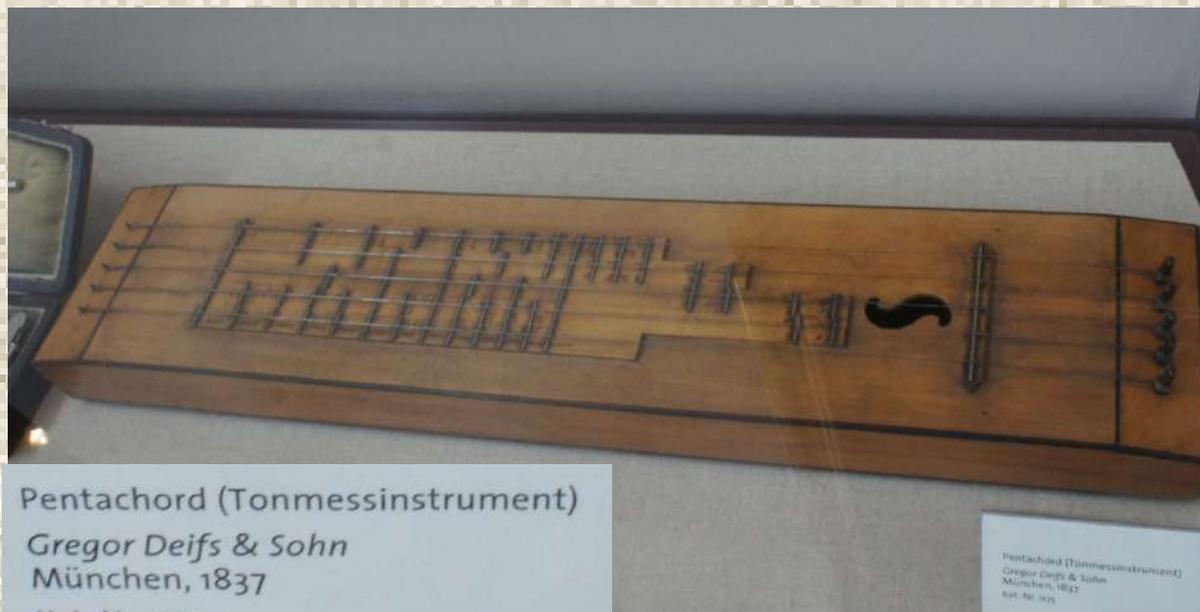
DO	SOL	RE	LA	MI	SI	FA #	DO#	SOL#	RE#	LA#	MI#	SI #
1	$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{512}{729}$	$\frac{2048}{2187}$	$\frac{4096}{6561}$	$\frac{16384}{19683}$	$\frac{32768}{59049}$	$\frac{131072}{177147}$	$\frac{524288}{531441}$

n quintes	p octaves	$\frac{2^n}{3^p} \times 2^p$	Nom de la gamme
5	3	$\frac{2^8}{3^5} \approx 1,053$	Pentatonique ou chinoise (\approx touches noires)
7	4	$\frac{2^{11}}{3^7} \approx 0,936$	Diatonique (\approx touches blanches)
12	7	$\frac{2^{19}}{3^{12}} \approx 0,987$	Chromatique (\approx toutes les touches)

Refermer le cycle des quintes reviendrait à trouver des entiers n et p tels que :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \times 2^{n'} = \left(\frac{2}{3}\right)^p \times 2^{p'}$$

**PLETHORE DE
GAMMES...**



Pentachord (Tonmessinstrument)
Gregor Deifs & Sohn
München, 1837
Kat.-Nr. 1175

Pentachord (Tonmessinstrument)
Gregor Deifs & Sohn
München, 1837
Kat.-Nr. 1175

Cité de la musique, BERLIN



NAISSANCE DE LA POLYPHONIE

La superposition de voix décalées à la quarte ou à la quinte dans les chants grégoriens marque les débuts attestés de la **polyphonie** (IX^{ème} s.).
De nouveaux intervalles apparaissent.

L'essor de la polyphonie au XII^{ème} siècle est lié :

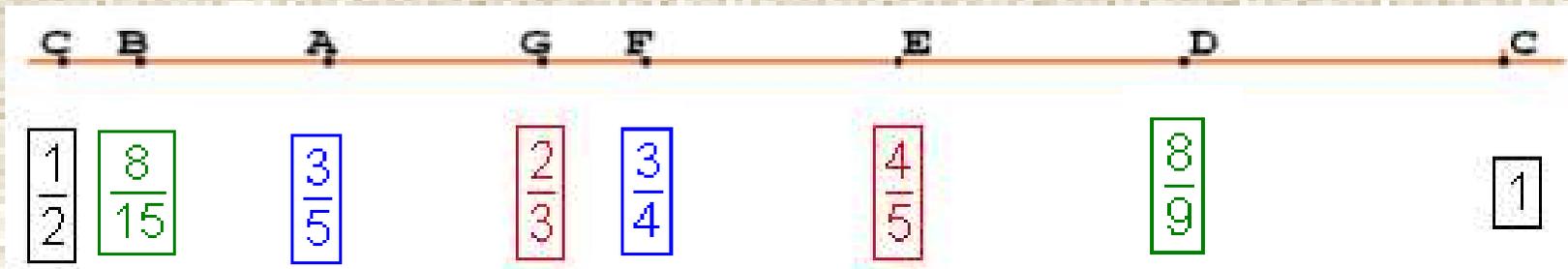
- à l'évolution de la **mesure du temps**
- à une notation **verticale** sur les partitions
- à la consonance de deux ou plusieurs sons émis **simultanément**.

Accord : (au moins) trois sons différents entendus simultanément



LA GAMME DE ZARLINO(1560)

Accord parfait majeur : fondamentale, tierce (4/5) et quinte (2/3)



On part de l'accord parfait majeur (en rouge)
En gardant ces intervalles, on obtient 4 notes :
- avec comme fondamentale : le fa (F)
- avec comme fondamentale : le sol (G)



ZARLINO
(1517-1590)

LE POIDS DE LA TRADITION ANTIQUE

« Un grave tourment nous bouleverse, à savoir que par suite de la négligence de certains recteurs qui, tant que l'espoir d'une impunité l'a autorisé, ont accoutumé leurs ouailles à propager nombre d'infections (...)

La plupart des ministres des églises (...), se permettent de psalmodier en modulant, en syncopant, en y entremêlant même des paroles étrangères et généralement stupides et profanes(...).

Dans le même temps, ils se laissent entraîner à différents forfaits, ce qui dérange bien souvent l'office ecclésiastique en offensant la majesté divine, et en scandalisant l'assistance .»



Concile de Vienne (1311-1312)

MUSIQUE ET ASTRONOMIE, MEME COMBAT



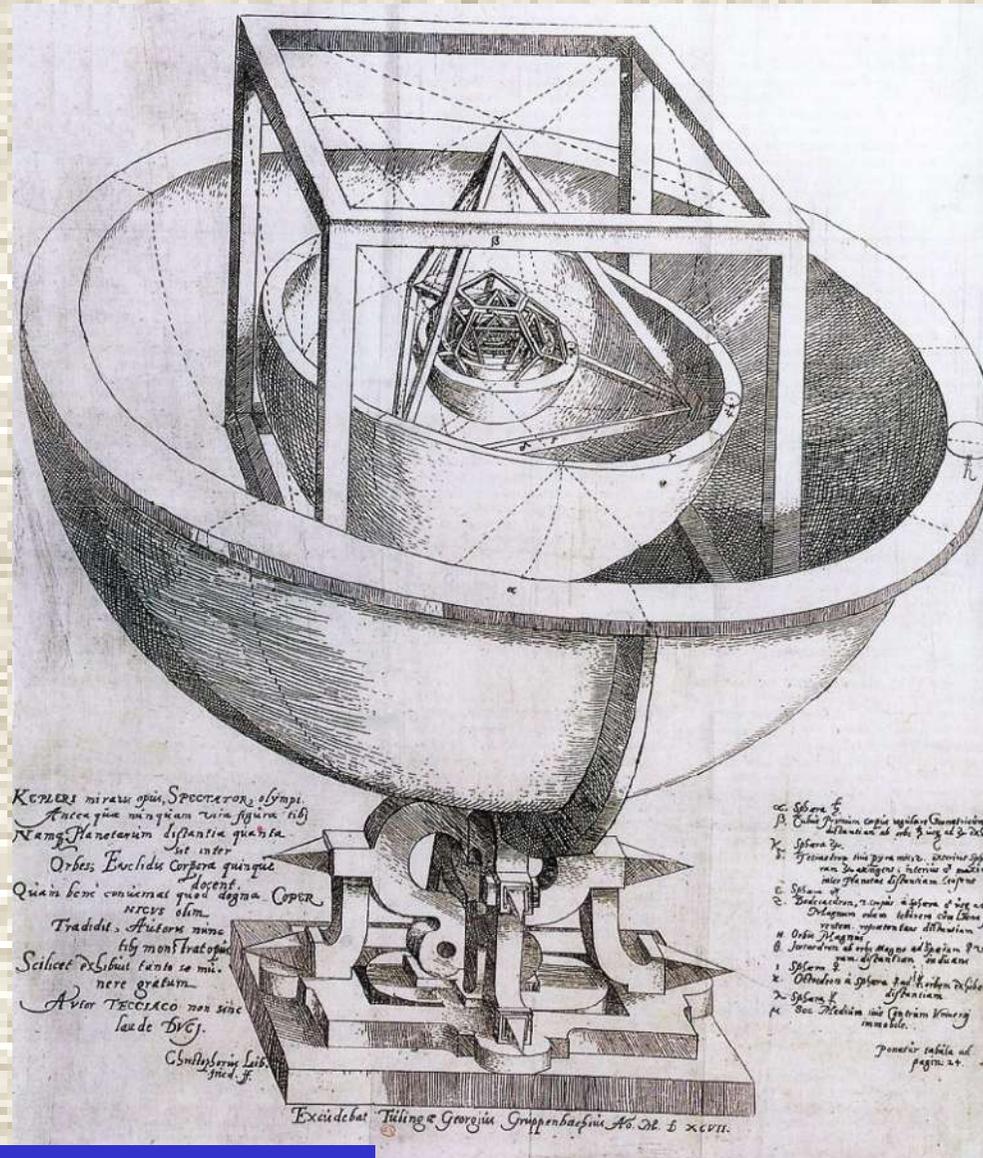
J. KEPLER (1571-1630)

HARMONICIS LIB. V. 207

omnia (infinita in potentia) permeantes actu : id quod aliter à me non
potuit exprimi, quam per continuam seriem Notarum intermedia.

Saturnus Jupiter Mars ferè Terra

Venus Mercurius Hic locum habet etiam



MUSIQUE ET ASTRONOMIE, MEME COMBAT

Vincenzo GALILEI est un théoricien, praticien (luthiste), mais aussi compositeur de l'école musicale Florentine. Il produit un démenti expérimental des proportions des « marteaux de Pythagore », quitte à se brouiller avec son maître Zarlino. L'un de ses fils, Galileo, découvre que Jupiter possède des stellites, prouvant que le géocentrisme n'est pas universel. **Ainsi, Galilée père et fils remettent en question les canons mathématiques antiques de la musique et de l'astronomie !**



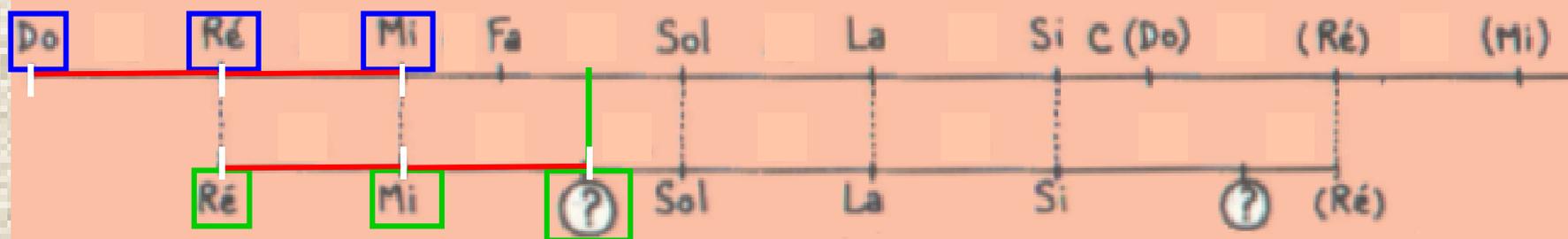
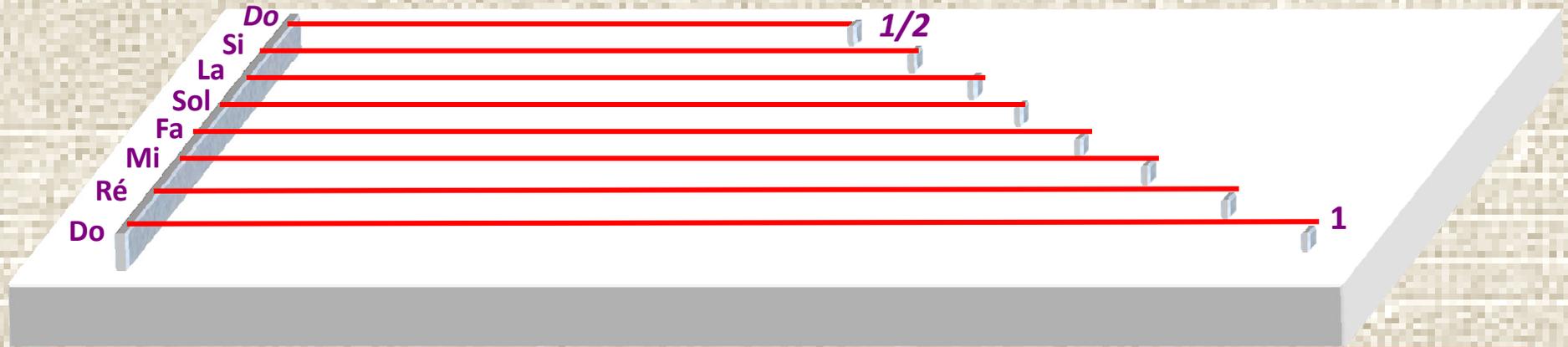
Vincenzo Galilei (1520-1591)
(BNF Richelieu, Fonds Estampes)

« Il existe peu de choses qui ne peuvent être pesées, comptées ou mesurées ».
Vincenzo ne refuse pas les mathématiques, mais au lieu de les considérer comme un langage qui permet l'expression de la beauté des nombres et de leurs relations, il les utilise pour traiter des grandeurs préalablement mesurées.

F.Baskevitch in **Arts et Sciences à la Renaissance** (coord. E. BARBIN)

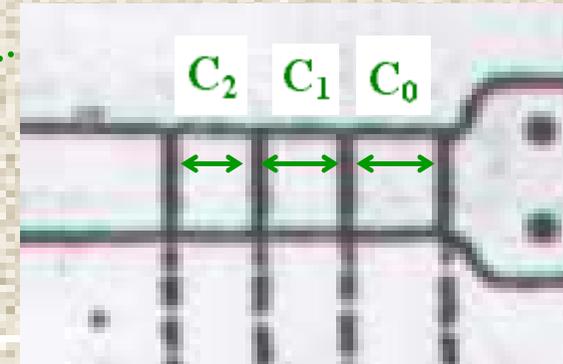
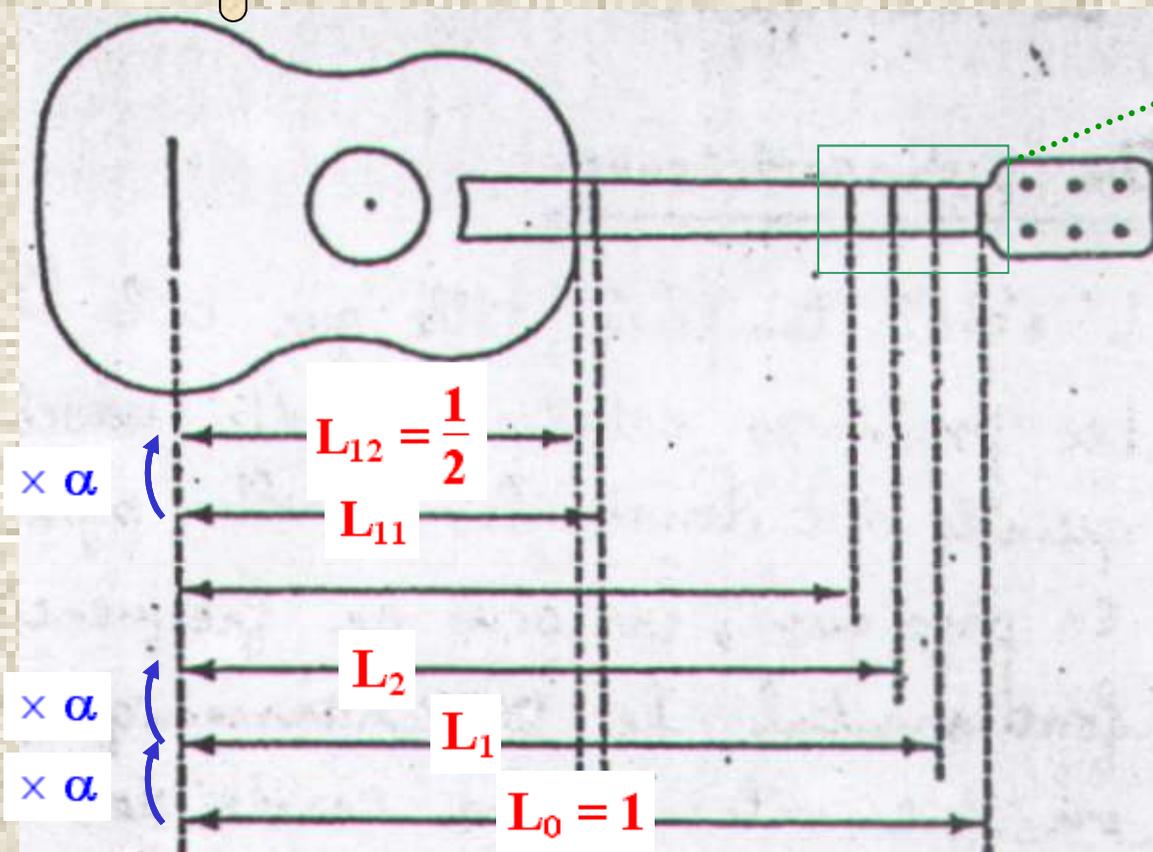
DES INTERVALLES INÉGAUX, ET ALORS ?

Transposer : jouer une mélodie en changeant la note de départ



Longueur de corde	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{27}$	$\frac{128}{243}$	$\frac{1}{2}$
Note	Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do

LA GAMME (EGALEMENT) TEMPEREE



$$\alpha^{12} = \frac{1}{2}$$

donc

$$\alpha = \sqrt[12]{\frac{1}{2}}$$

On demande que $L_0 = 1$, $L_1 = \alpha$, $L_2 = \alpha^2$, ... Bref, $L_n = \alpha^n$

Donc $C_0 = 1 - \alpha$, $C_1 = \alpha - \alpha^2$, $C_2 = \alpha^2 - \alpha^3$, ... et $C_n = \alpha^n - \alpha^{n+1}$

Conclusion évidente : C_n est aussi géométrique de raison α !!!

LA MUSIQUE : UNE MATHÉMATIQUE MIXTE

Simon STEVIN (1548-1620) est le premier auteur de la division en 12 demi-tons égaux de l'octave.

Le père Marin MERSENNE (1588-1648) proposera, lui, le rapport

$$4 \sqrt{\frac{3 - \sqrt{2}}{2}}$$



**Une expérience fondamentale (celle montrant le besoin de la transposition) débouche sur un problème théorique : calculer la racine douzième de 2.
Retour de flamme : trouver une valeur approchée pour l'artisan !**

LE CHAINON MANQUANT ?

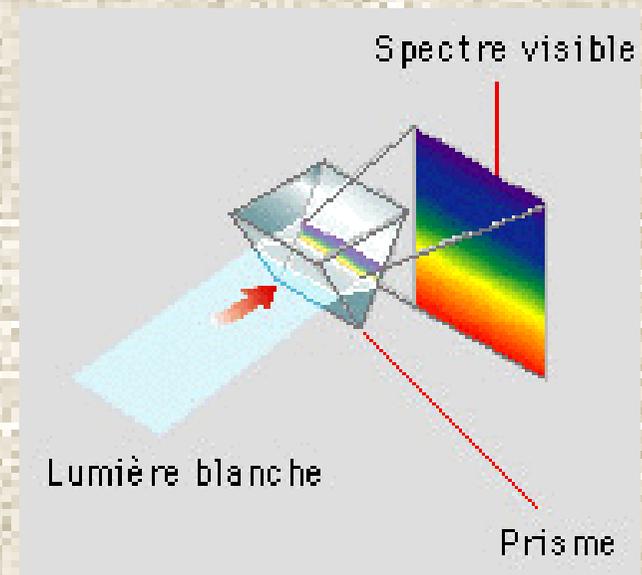


FOURIER
(1768-1830)

"Tout son de fréquence F est le résultat de la superposition de sons"

... Situation mathématisée par la décomposition unique d'une fonction périodique ("régulière") de fréquence F en somme de fonctions trigonométriques de fréquences F mais aussi $2F, 3F, 4F, ..$ (**harmoniques**)

Ce résultat est analogue à la décomposition de la lumière blanche...



EXPLICATION SCIENTIFIQUE DE L'HARMONIE

La règle des 2/3 dans les cycles des quintes de la gamme de Pythagore, les fractions de la gamme de Zarlino de dénominateur 2, 3, 4, 5 ...

Harmoniques d'une note (disons : do)	N	2N	3N	4N	5N	6N	7N	8N	9N	10N
Harmoniques de la tierce majeure, Zarlino (XVI ^{ème} s.) (mi)	$\frac{5}{4}N$	$\frac{5}{2}N$	$\frac{15}{4}N$	5N	10N
Harmoniques de la quarte de Pythagore (fa)	$\frac{4}{3}N$	$\frac{8}{3}N$	4N	8N	12N	...
Harmoniques de la quinte de Pythagore (sol)	$\frac{3}{2}N$	3N	...	6N	...	9N	...	12N	...	15N

... ont une infinité d'**harmoniques en commun** (en théorie).

Or rien ne dissonne moins avec un son que ce son lui-même, non ? ...