Neveu 1908

Etudier les variations de la fraction $\dfrac{3x^2 - 4x + 3}{x^2+1}$

Posons $\dfrac{3x^2 - 4x + 3}{x^2+1} = y$ *d'où* $(3-y)\, x^2 - 4x + 3 - y = 0$

Pour que cette équation en x ait des racines , il faut que l'on ait :

$4 - (3-y)^2 \geq 0$ *ou* $(5-y)(-1+y) \geq 0$. *Dans cette expression,* le *coefficient de* y^2 *est négatif : donc y devra varier entre les racines qui sont 5 et 1 ; 5 sera le maximum, nous le désignerons par M, et 1 sera le minimum nous le désignerons par m.*

Les valeurs correspondantes de x sont : $x = \dfrac{2}{3-y}$

A $y = 5$ *correspond* $x = -1$

A $y = 1$ *correspond* $x = 1$

Le numérateur et le dénominateur ne s'annulent jamais ; donc ils sont toujours positifs, et par suite, la fonction est toujours positive. On obtient sans difficulté le tableau suivant :

Valeurs de x	$-\infty$	*Croît*	*-1*	*Croît*	*O*	*Croît*	*+1*	*Croît*	$+\infty$
Valeurs de y	*3*	*Croît*	*M=5*	*Décroît*	*3*	*Décroît*	*m=1*	*Croît*	*3*
Signe de y	*Fonction toujours positive*								

Maillard 1962

La procédure indiquée pour résoudre une inéquation produit est la suivante :

1. Le problème est ramené à l'étude du signe d'une expression de la forme P(x) = A(x-a)(x-b) … (après élimination des facteurs carrés ...)
2. On range les valeurs qui annulent P dans l'ordre croissant
3. On déduit le signe de P sur chacun des intervalles ainsi obtenus en utilisant le fait qu'à chaque fois que l'on change d'intervalle, seul un facteur change de signe et que donc P change de signe .
   Les intervalles sont représentés sur une droite, on détermine le signe de P sur le premier intervalle en donnant une valeur à x, puis on alterne les signes.
4. On récapitule les résultats et on conclut.

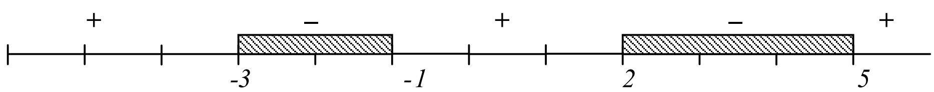
Résoudre l'inéquation $(x-5)(x-1)(x-2)(x+3) > 0$

Les facteurs successifs s'annulent respectivement pour les valeurs 5 ; -1 ; 2 ;-3. Nous rangeons ces valeurs par ordre croissant : -3 ; -1 ; 2 ; 5.

D'après ce qui précède, nous pouvons conclure que pour x>5 tous les facteurs sont positifs et l'inéquation est vérifiée.

Si maintenant x prend une valeur comprise entre 2 et 5, seul le facteur x-5 change de signe et le produit change de signe. Le produit est donc négatif pour 2< x <5. Et le raisonnement se poursuit…/…

Le schéma indique les changements de signe du produit :



Riche (1970) Première CDE

La méthode donnée s'applique à l'étude du signe de toute fonction polynôme ou rationnelle. Elle repose sur un résultat d'algèbre qui est admis.

Extrait du manuel
Nous admettrons que si le corps utilisé est R , tout polynôme de degré supérieur à 2 peut être mis sous forme d'un produit de polynômes du premier degré et du second degré à discriminant négatif.
Si $P(x) = 5(x-1)(x+2)^2(x^2+x+1)$
L'équation $x^2+x+1=0$ n'a pas de racine quel que soit x : $x^2+x+1>0$
Le polynôme P admet 1 comme zéro simple, -2 comme zéro double
Quel que soit x distinct de -2 et de 1, P(x) a le signe de (x-1)

Remarquons que la valeur d'un polynôme du premier degré change de signe quand x « traverse » son zéro. La valeur d'un polynôme du second degré change de signe si x « traverse » un zéro simple du polynôme, mais elle ne change pas de signe si x « traverse » un zéro double.
Ce résultat est général ; la valeur d'un polynôme P ne peut changer de signe que si x « traverse » un zéro du polynôme P, si x « traverse un zéro simple (d'ordre 1) ou triple (d'ordre 3), la valeur de P(x) changera de signe ; si x « traverse » un zéro double (d'ordre 2) ou un zéro quadruple (d'ordre 4), la valeur de P(x) ne changera pas de signe.

Considérons, par exemple, le polynôme $P(x) = 63(x+2)^2(x-1)(x-3)^3(x-5)$. P est un polynôme du 7ième degré. Il admet –2 comme zéro double,1 comme zéro simple, 3 comme zéro triple, 5 comme zéro simple. Sur chacun des intervalles $]-\infty$, 1[,]1, 3[,]3, 5[,]5, $+\infty$[, P(x) conserve un signe constant. Calculons la valeur de P(x) pour x appartenant à l'un de ces intervalles. Par exemple P(0)<0 ; P(x) est donc négatif lorsque x décrit]-2, 1[. D'où le tableau :

x	$-\infty$ -2	1	3	5	$+\infty$
P(x)	–	-	+	-	+

Cette méthode repose sur la possibilité de factoriser les fonctions polynômes dans ℝ (« tout polynôme de degré supérieur à 2 peut être mis sous forme d'un produit de polynômes du premier degré et du second degré à discriminant négatif. ») et sur des connaissances à propos du trinôme du second degré.