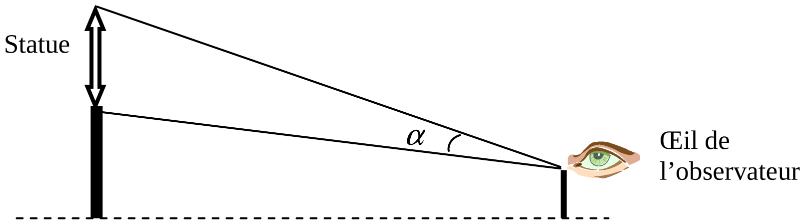
PREMIER PARCOURS SUR LES FONCTIONS :
Comment optimiser une quantité ?
Comment déterminer une quantité à partir d'une autre ?

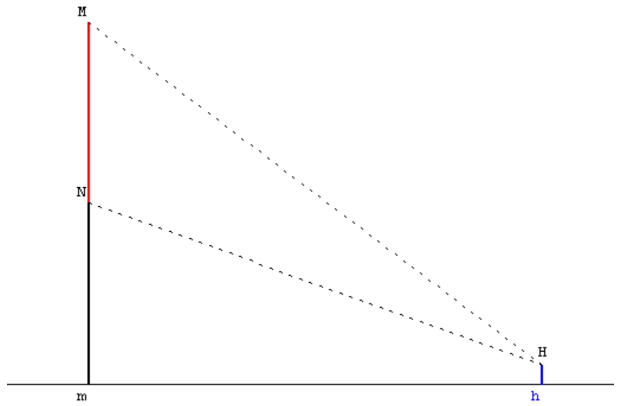
❒ <u>Etude 1 :</u> *Comment varie l'angle sous lequel on voit un objet quand un observateur se déplace en ligne droite vers le pied de l'objet ? L'exemple de la statue de la Liberté de New York.*

La situation et les données : *La statue de la Liberté, érigée en 1886, est haute de 46,50 m sans son socle et de 93 m avec socle. Arrivant à New York droit sur l'île de Liberty Island, un touriste placé à l'avant d'un bateau regarde la statue. Il a son œil placé à 5 m au-dessus de la mer.*
Ce qu'on appelle l'angle de vision est l'angle - noté α - sous lequel la statue est vue dans sa totalité.

La figure ci-contre résume la situation



Partie A : *A votre avis :*
Quand on s'approche de la statue :
1- *l'angle de vision diminue*
2- *l'angle de vision augmente*
3- *l'angle de vision varie de manière plus compliquée*
4- *on ne peut pas savoir a priori.*



Partie B : *On "mathématise" la situation de la manière suivante :*
- *la statue et son socle sont assimilés à deux segments verticaux portés par la même droite,*
- *l'observateur est assimilé à un segment vertical qui représente la hauteur de son œil par rapport au niveau de la mer,*

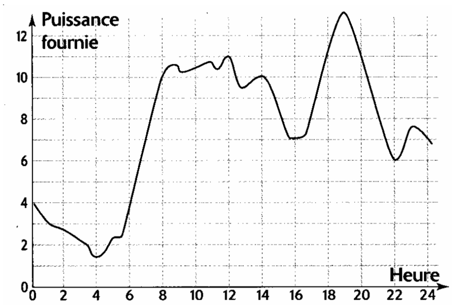
On va représenter la situation sur une feuille A4 à l'échelle $\frac{1}{1000}$

1- *Expliquer pourquoi cette représentation à l'échelle permet de mesurer l'angle de vision réel de la statue, à partir d'une distance donnée entre l'observateur le centre du piédestal.*

2- *Comment varie l'angle de vision au fur et à mesure que le bateau se rapproche de la statue ? Argumenter.*

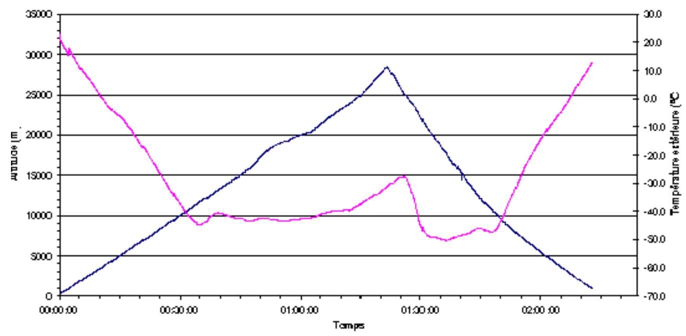
❒ <u>Exercices "génériques" pour travailler la technique</u>

Exercice 1 :
Ce graphique représente l'évolution de la puissance fournie par l'ensemble des centrales hydrauliques en Gw (gigawatts) au cours d'1 journée en France



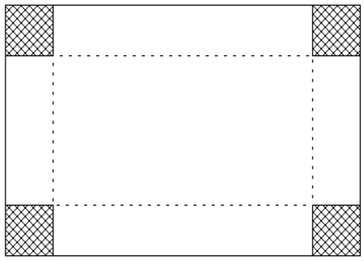
1. Quelle puissance fournissent ces centrales : à 6h ? à 8h ? à 22h ?
2. Quel est l'éventail des puissances produites au cours de la journée ?
Et entre 14h et 20h ?
3. A quel(s) moment(s) de la journée fournissent-elles :
a) une puissance de 8 Gw ?
b) une puissance supérieure ou égale à 8 Gw ?
c) une puissance comprise entre 8 et 9 Gw ?
4. A quel moment de la journée la puissance fournie est-elle maximale ? minimale ?

Exercice 2 :
Voici un graphique représentant les mesures de l'altitude et de la température de l'air au cours de l'ascension et de la descente d'un ballon sonde. Arrivé à une certaine altitude, le ballon sonde éclate. Alors, il chute, mais ... les données scientifiques (température, altitude, ...) sont toujours enregistrées et transmises à un ordinateur qui donne les courbes ci-dessous. Rechercher à l'aide de ces courbes :
a) le temps au bout duquel le ballon éclate
b) l'altitude à laquelle il éclate
c) la durée de la descente
d) si, lors de la montée, la vitesse est constante
e) si lors de la descente la vitesse est constante
f) si le ballon descend plus vite qu'il ne monte
g) comment varie la température pendant le vol



❒ **Etude 2 :**

On construit une boite sans couvercle ayant la forme d'un parallélépipède rectangle en découpant un carré dans chaque coin, puis en formant la boîte en « pliant » suivant les pointillés.



Une feuille cartonnée a comme dimensions 2 dm sur 3 dm.

1. Est-il possible que le volume de la boîte soit de 0,7 dm^3, à 20 cm^3 près ?
2. Quel côté du carré permet de construire la boîte de volume maximal ?

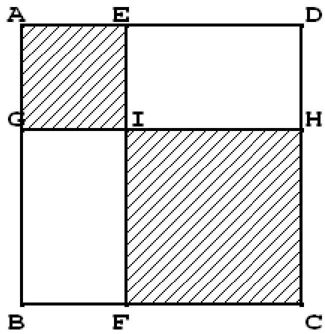
❒ **Exercices "génériques" pour travailler la technique**

Exercice 4 :

1. Exprimer le périmètre d'un carré en fonction de son côté x.
2. Exprimer l'aire latérale d'un cube en fonction de son arête x.
3. a) Exprimer le périmètre d'un cercle en fonction de son diamètre d puis en fonction de son rayon r.
   b) Exprimer maintenant le rayon d'un cercle en fonction de son périmètre

Exercice 5 :

ABCD est un carré de côté 5 ; E est un point du segment [AD] ;
G est le point du segment [AD] tel que AE =AG. La parallèle à (AB) passant par E coupe [BC] en F et la parallèle à (AD) passant par G coupe [CD] en H.
(GH) et (EF) se coupent en un point I.
On va notamment comparer l'aire de la partie hachurée (notée A) et l'aire en blanc

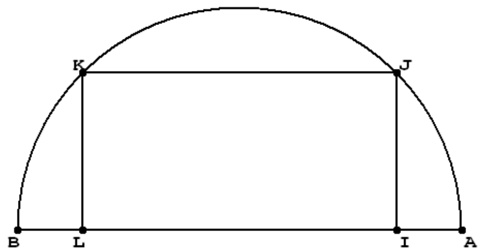


1. On pose AE = x.
   a) Quelles sont les valeurs possibles de x ?
   b) Vérifier que l'aire hachurée s'exprime en fonction de x par A $= 2x^2 - 10x + 25$.

2. A l'aide d'un graphique :
- Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles l'aire A est égale à 20 cm ².
- Déterminer toutes les valeurs de x pour lesquelles l'aire A est supérieure ou égale à 20 cm ².
- Estimer pour quelle valeur de x l'aire A est minimale. Faire la figure correspondante.
- Comparer l'aire hachurée et l'aire en blanc

Exercice 6 :

[AB] est un segment de longueur 8. O est le milieu de [AB].
I est un point variable sur [OA] et on construit le rectangle IJKL inscrit dans le demi-cercle de diamètre, avec OI = OL.



On note a l'aire du rectangle IJKL.
On note x la longueur IO et A l'aire du rectangle IJKL.
1) Vérifier que a s'exprime en fonction de x par a $= 2x\sqrt{16 - x^2}$
2) Rechercher quelle est la valeur maximale de a. Dessiner la figure dans ce cas précis.

Exercice 7 :

On veut clôturer un terrain rectangulaire de 450 m² dont un côté s'appuie sur le bord rectiligne d'une rivière, ce côté ne nécessitant pas de clôture. Déterminer les dimensions du terrain pour minimiser la longueur de clôture nécessaire

❒ **Etude 3 :** OAB est un triangle rectangle en O tel que OA=2 et OB=8.

M est un point de [OA]. N est le point de [OB] tel que BN=3 OM
Déterminer où placer exactement le point M sur [OA] pour que l'aire du triangle OMN soit maximale.

❒ **Exercices "génériques" pour travailler la technique**

Exercice 8 :

1. Démontrer que l'expression $(x - 3)^2 + 8$ a pour valeur minimale 8 quel que soit le nombre x.
2. Pour chacune des expressions suivantes, déterminer si elles ont un minimum ou un maximum, préciser cet extremum, et en quelle valeur de la variable il est atteint :

$A = x^2 + 4$; $B = -x^2 + 4$; $C = (x - 3)^2 - 4$; $D = -(x - 3)^2 - 4$; $E = 2(x + 4)^2 + 1$; $F = -3(x - 1)^2$

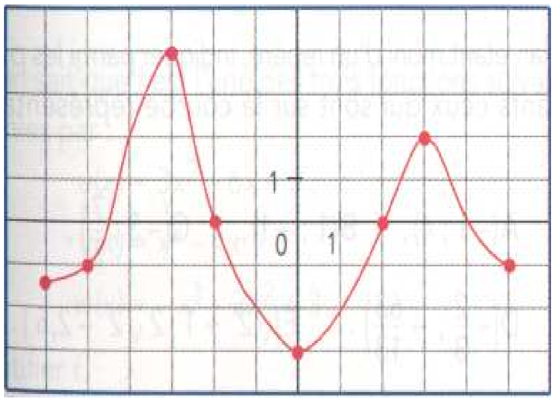
Exercice 9 :
ABCD est un carré de côté 8 cm ; on construit E, F, G, H et I exactement comme dans l'exercice n°5.
On hachure cette fois le carré AEIG et le triangle IBC.
Le but de l'exercice est d'étudier l'aire de la partie hachurée quand E se déplace sur [AD]. On note A cette aire.

1. Dessiner trois figures : quand E et A sont confondus, quand E est milieu de [AD] et quand E et D sont confondus.
2. Déterminer quand l'aire A est supérieure ou égale à 40 cm ².
3. Quel est le minimum de l'aire A ? Démontrer ce résultat algébriquement.
4. Comparer l'aire A et l'aire de la partie non hachurée.

Exercices de travail de la technique : *intégration du vocabulaire et des notations, mais aucune technique nouvelle*

Exercice 10 :
On considère la fonction f définie sur ℝ par f(x) = (- x + 1)(2x – 3)
1. Calculer l'image par f de 0, puis de 2/3, et enfin de $\sqrt{3}$.
2. Quels nombres ont pour image 0 par f ?

Exercice 11 :
Voici la courbe d'une fonction f.
1. Donner le domaine de définition de f.
2. Déterminer l'image par f de 0, de 3, de 2 et de -1.
3. Quel(s) nombre(s) ont pour image 4 ? 0 ? -2 ?
4. Trouver un nombre qui n'est l'image d'aucun nombre
5. Résoudre les équations f(x) = - 1 et f(x) = 0.
6. Déterminer le signe de f(x) selon les valeurs de x
7. Résoudre les inéquations f(x) ≥ 3 et f(x) < 1.
8. Si x ∈ [-2 ; 2] , à quel intervalle appartient f(x) ?
9. Si f(x) ∈ [0 ; 2], à quels intervalles appartient x ?



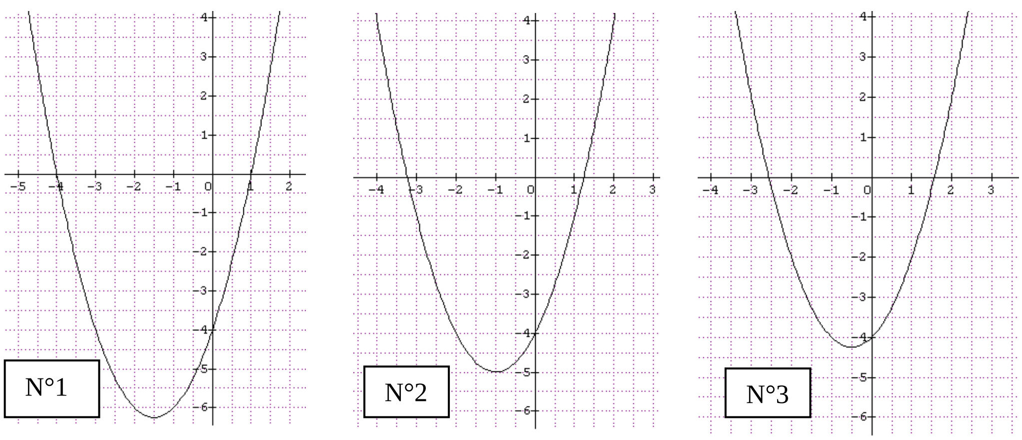
Exercice 12 :
On appelle f la fonction définie sur] – ∞ ; + ∞ [par : f (x) = x^2 + 3 x – 4 (forme A)
1. Vérifier que, pour tout nombre x ∈] – ∞ ; + ∞ [, l'expression f (x) peut s'écrire sous deux autres formes :

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{25}{4} \quad \text{(forme B)} \qquad \text{ou} \qquad (x+4)\,(x-1) \quad \text{(forme C)}$$

2. En utilisant à chaque fois une des formes A, B ou C, au choix, répondre à ces questions :

a) Calculer f $\left(-\frac{3}{2}\right)$ b) Résoudre l'équation f (x) = - 4. c) Quels nombres ont pour image 0 ?

3. L'une des trois courbes suivantes est la courbe C_f . Laquelle ? Justifier.



Exercice 13 : On définit les fonctions f et g sur] – ∞ ; + ∞ [par f(x) = x ² + 5 et g(x) = 2 x²
Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe de f et de la courbe de g.