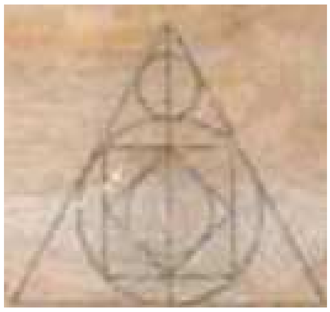
PREMIER PARCOURS DE GEOMETRIE :
Comment construire une figure devant respecter des conditions ?
Comment savoir si une méthode de construction est éxacte ou approchée ?

❒ Etude 1 : Comment reproduire une figure ?

Imaginez : vous êtes japonais au XVII^{ème} siècle et vous voulez rendre hommage aux Dieux en leur offrant ce sangaku (figure ci-contre).



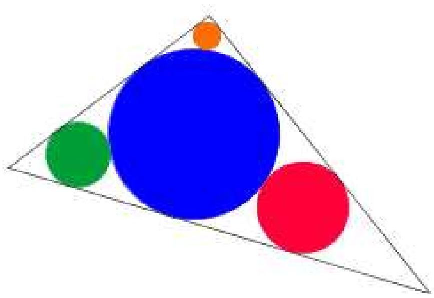
Vous devez reproduire cette figure, en partant du grand triangle, à la règle et au compas et expliquer la construction.

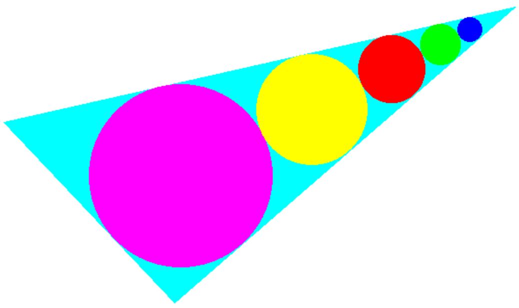
Vous disposez des informations suivantes :

- *le grand triangle est équilatéral,*
- *les deux cercles sont tangents entre eux et tangents aux côtés du grand triangle,*
- *les quadrilatères sont des carrés*
- *et le grand carré a deux côtés parallèles à un côté du grand triangle.*

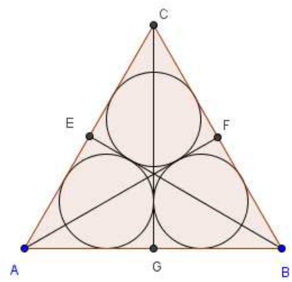
Exemples d'exercices :

Exercice 1 :
Reproduire la figure suivante à l'aide d'un logiciel de géométrie.





Exercice 2 :
Inscrire trois cercles de même rayon dans un triangle équilatéral



❒ Etude 2 : constructions exactes ou approchées ?

*Parmi les problèmes de géométrie rencontrés par les artisans et artistes depuis l'Antiquité, figurent en particulier des problèmes «d'inscription » et «de circonscription». On les retrouve chez les **géomètres grecs de l'Antiquité** (voir lien avec le cours d'histoire) ou les **mathématiciens chinois** bien avant notre ère. On les trouve aussi chez les artisans Arabes pour construire des fresques (comme dans l'Alhambra de Grenade) ce qui a conduit Abul Wafa à écrire un ouvrage intitulé : **« Livre sur ce qui est nécessaire à l'artisan en science de la géométrie »**dans lequel il donne des moyens de construire des figures en particulier inscrites ou circonscrites à d'autres figures. Certaines constructions sont mathématiques exactes, d'autres sont des constructions approchées.*

Construction 1 : circonscrire un carré à un triangle équilatéral par Abul Wafa

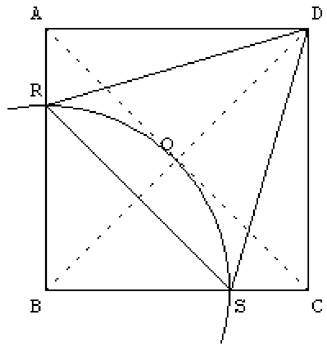
Soit ABE un triangle équilatéral.
On trace la médiatrice de [AE] et on place D le milieu de [AE].
On place C sur [BD) extérieur au triangle ABE tel que DC= DE.
La perpendiculaire à (CE) passant par B coupe (CE) en H et la perpendiculaire à (CA) passant par B coupe (CA) en G. CHBG est un carré circonscrit à ABE.
Cette construction proposée par Abul Wafa est-elle exacte ? Autrement dit, CHGB est-il vraiment un carré ?

Construction 2 : Inscrire un triangle équilatéral dans un carré.

Soit ABCD un carré de centre O et soit (C) le cercle de centre B passant par O.

(C) coupe [AB] en R et [BC] en S.

Abul Wafa affirme que DHG est équilatéral. Est-ce vrai ?



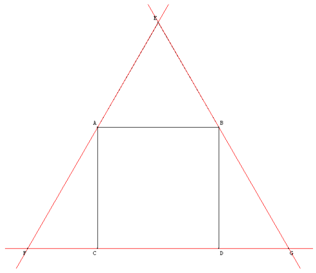
Exemples d'exercices

Exercice 1 :

Soit ABCD un carré. Extérieurement à ABCD, on construit le triangle équilatéral ABE. (AE) et (EB) rencontrent (CD) en F et G.

Le triangle EFG est circonscrit à ABCD.

Mais est-il équilatéral ?



Exercice 2 :

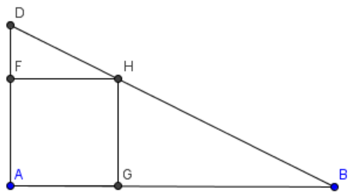
ABD est un triangle rectangle. AD=a et AB=2a.

On place F sur [AD] tel que AF= $\frac{2}{3}$ a.

La perpendiculaire à (AD) passant par F coupe (BD) en H.

La perpendiculaire à (AB) passant par H coupe (AB) en G.

FHGA est-il un carré ?



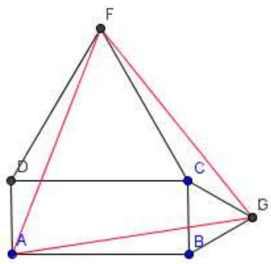
❒ Etude 3 :

De nouvelles méthodes pour justifier si des constructions sont exactes

On souhaite résoudre le problème suivant :

ABCD est un rectangle. On construit les triangles équilatéraux BCG et CDF

BFE est-il équilatéral ? Comment le justifier ?



Etude 3 (suite)

Un triangle ABC **est donné** *: il possède 6 données numériques facilement accessibles : les mesures de ses côtés AB, BC , AC et de ses angles* $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ *et* $\widehat{C}$.

Construire un triangle MNP dans différents cas suivants:

			Isométriques	*Non isométriques*
BC= MN	$\widehat{A}=\widehat{M}$	$\widehat{C}=\widehat{N}$		
AC= MN	*AB=MP*	$\widehat{A}=\widehat{M}$		
AB= MP	$\widehat{B}=\widehat{C}$			
$\widehat{A}=\widehat{M}$	$\widehat{B}=\widehat{P}$	$\widehat{C}=\widehat{N}$		
AB= MP	*AC= MN*	*BC= PN*		
AB=PM	*BC= PN*	$\widehat{A}=\widehat{M}$		

Dans quel cas semble-t-on assuré que les triangles ABC et MNP sont isométriques ?

Quel nombre minimal de données faut-il avoir sur MNP pour être sûr que MNP et ABC soient isométriques ?

Exemples d’exercices

Exercice 1 :

- *construire deux triangles ABC et MNP non isométriques tels que* $\widehat{A} = \widehat{M} = 30°$ *et* $\widehat{B} = \widehat{N} = 100°$
- *construire deux triangles ABC et MNP non isométriques tels que AB = MN= 5cm et BC =NP= 6cm.*

Exercice 2 :

Résoudre le problème initial de l'étude 3

Exercice 3 :

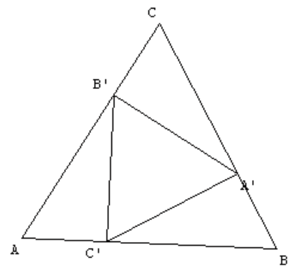
Démontrer qu’en joignant les milieux des côtés d’un triangle quelconque, on obtient 4 triangles isométriques.

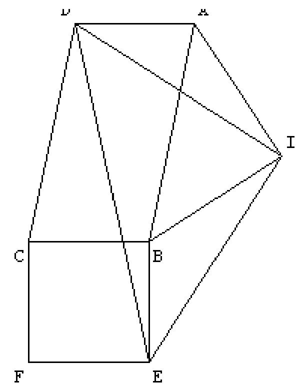
Exercice 4 :

ABC est un triangle équilatéral.

Voici la construction d’un triangle A’B’C’ équilatéral inscrit dans ABC.

AC’= BA’= CB’. Justifier la construction.





Exercice 5 : ***Un triangle isocèle rectangle inscrit ?***

ABCD est un parallélogramme.

BCFE est un carré et AIB un triangle isocèle rectangle en A extérieur à ABCD.

Le triangle IDE est-il rectangle isocèle ?

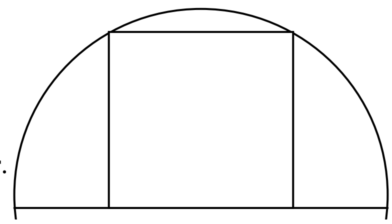
❒ Etude 4 : L’algèbre pour construire des figures

Raphaël dans son tableau célèbre L’école d’Athènes a utilisé la construction d’un carré dans un demi cercle.
Pouvez vous retrouver ce tableau dans votre manuel d’histoire ?

Pouvez vous retrouver le carré et le demi-cercle dans le tableau de Raphaël ?
Comment construire un carré dans un demi-cercle ?

Soit (C) un demi cercle quelconque de centre O et de rayon r.

1- Faire un dessin à main levée puis calculer le côté a du carré en fonction de r.
2- Utiliser ce résultat pour construire le carré. Justifier.



Exemples d’exercices

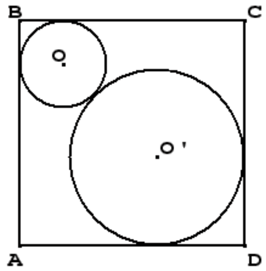
Exercice 1:
Construire un rectangle inscrit dans un cercle
et dont la longueur est le triple de la largeur.

Exercice 2 :
Inscrire dans un demi cercle de rayon 5 un rectangle d’aire 24.

Exercice 3

Dans un carré de côté 4, inscrire deux cercles comme ci-contre

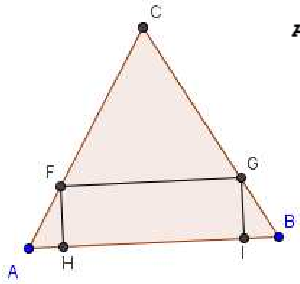
le rayon de l'un étant de double de l'autre.



Exercice 4 :

Inscrire dans un triangle équilatéral un rectangle

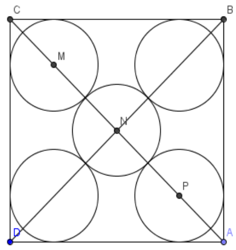
dont la longueur est le triple de sa largeur.



Exercice 5 :

Reproduire la figure suivante : 5 cercles de même rayon dans un carré.

Les cercles sont centrés sur les diagonales.



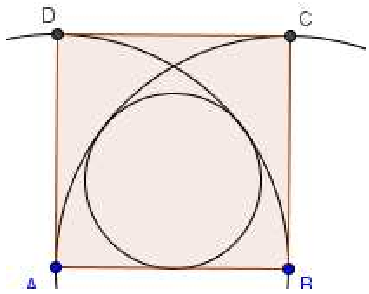
Exercice 6 :

Construire un triangle équilatéral dont l'aire est 12.

Exercice 7:

Dans un carré on inscrit deux quarts de cercle.

Construire le cercle tangent aux deux quarts de cercle et à un côté (voir figure).



❒ <u>Etude 5 :</u>

Inscrire dans un demi-cercle de rayon 5 un triangle rectangle dont la différence des côtés de l'angle droit est 2.

Exercice 1 : (D'après François Viète mathématicien français (1540-1603)

1. Étant donné un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle et la différence entre l'autre côté et l'hypoténuse, trouve cet autre côté et l'hypoténuse. Application numérique : 5 et 1

2. Étant donné un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle et la somme de l'autre côté et de l'hypoténuse, trouve cet autre côté et l'hypoténuse. Application numérique : 5 et 25

3. Étant donné l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la différence entre les deux côtés de l'angle droit, trouve les côtés de l'angle droit. Application numérique : 13 et 7.

4. Étant donné l'hypoténuse d'un triangle rectangle et la somme des deux côtés de l'angle droit, trouve les côtés de l'angle droit. Application numérique : 13 et 7.